波動方程式の導出

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L09(2010-12-07 Tue)

今日の目標

1. 波動方程式の意味を説明できるようになろう
2. 連成振動の運動方程式と波動方程式の関係を説明できるようになろう
3. $u(x,t)$ が波動方程式の解になっているかどうかチェックできるようになろう

http://hig3.net

物体番号 n とモード番号 ℓ って?

これまでちょっと不徹底だったけど, $u^{(\ell)}$ のように括弧付上付添字でモード番号を書きます. 物体番号は今まで通り, u_n.

$N=3$ の固有モード (Quiz L07)

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} A_1 \cos\left(\sqrt{2}t - \theta_1\right),$$

$$\boldsymbol{u}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} A_2 \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t - \theta_1\right),$$

$$\boldsymbol{u}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} A_3 \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}t - \theta_1\right).$$

ちなみに一般解は

$$\boldsymbol{u}(t) = C_1\boldsymbol{u}^{(1)}(t) + C_2\boldsymbol{u}^{(2)}(t) + C_3\boldsymbol{u}^{(3)}(t)$$

記法

$$u_3^{(1)}(t) = -1 \times A_1 \times \left(\sqrt{2}t - \theta_1\right)$$

Quiz 略解 I

Quiz 略解: 分散関係 $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{1}{2}p_\ell$, 波数 $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$ を使って,

$$
\begin{aligned}
\omega_1 =& 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.52\times\sqrt{\frac{k}{m}} \\
\omega_2 =& 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1\times\sqrt{\frac{k}{m}} \\
\omega_3 =& 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.41\sqrt{\frac{k}{m}} \\
\omega_4 =& 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.73\times\sqrt{\frac{k}{m}} \\
\omega_5 =& 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.93\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

$\ell = 1$ 固有モードは, $p_1 = \frac{\pi}{6}$ として,

$$u_n^{(1)}(t) = C\sin(np_1)\cos(\omega_1 t - \theta_1)$$

Quiz 略解 II

すなわち,

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(t) = C \begin{pmatrix} \sin(p_1) \\ \sin(2p_1) \\ \sin(3p_1) \\ \sin(4p_1) \\ \sin(5p_1) \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \theta_1) = C \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cos(2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi}{12}) t - \theta_1)$$

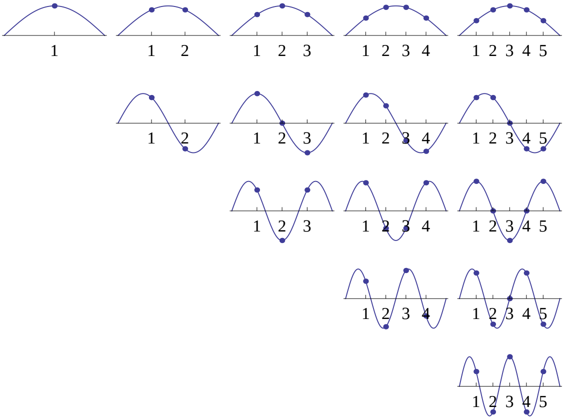
$\ell = 5$ 固有モードは, $p_5 = \frac{5\pi}{6}$ として,

$$u_n^{(5)}(t) = C \sin(np_5) \cos(\omega_5 t - \theta_5)$$

すなわち,

$$\boldsymbol{u}^{(5)}(t) = C \begin{pmatrix} \sin(p_5) \\ \sin(2p_5) \\ \sin(3p_5) \\ \sin(4p_5) \\ \sin(5p_5) \end{pmatrix} \cos(\omega_5 t - \theta_5) = C \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cos((2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{5\pi}{12}) t - \theta_5)$$

物体番号 n とモード番号 ℓ って?

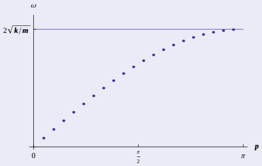


$N = 3$ 連成振動 (Flash)

`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mathphb_2009/coupled.swf`

N 物体の固定端の連成振動のまとめ

固有モード $\ell = 1, 2, \ldots, N$
物体番号 $n = (0,)1, 2, \ldots, N(, N+1)$.
波数 $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$.
固有周波数 $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p_\ell)$ (分散関係)
固有モード ℓ で物体番号 n の変位は,



$$u_n^{(\ell)}(t) = A_n C\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) = \sin(np_\ell)C\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell).$$

物体をならべてベクトルで書くと, $\boldsymbol{u}^{(\ell)}(t) = C\begin{pmatrix}\sin(p_\ell)\\ \vdots \\ \sin(Np_\ell)\end{pmatrix}\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell)$

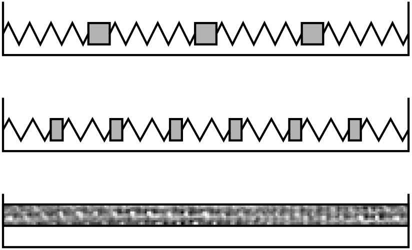
$$\text{一般解 } u_n(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell u^{(\ell)}(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \sin(np_\ell)\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \sin(\frac{\pi\ell n}{N+1})\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{\pi\ell}{2(N+1)})t - \theta_\ell\right).$$

波動方程式の導出

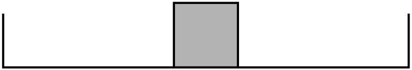
N 物体の固定端の連成振動で, $N \to +\infty$ としたい.
ただし, 全質量 M, 全ばね定数 K 全長 L は一定のままにしたい

そんな極限?



換算その 1: 物体の質量

全質量 M



N 物体のとき, 1 個あたり $m = \boxed{}$.

$N \to +\infty$ で $m \to 0$.

換算その 2: ばね

'全ばね定数' K, 全ばね長 L.

ばね長 $N = 1$ 物体のとき, ばね $1 + 1$ 本. 1 本あたりのばね長 $L/2$
N 物体のとき, ばね $N+1$ 本. 1 本あたりのばね長さ $\ell = L/(N+1)$
$N \to +\infty$ で $L \to 0$.

ばね定数 $N = 1$ 物体のとき, ばね $1 + 1$ 本. 1 本あたり $k = \boxed{\quad}$

N 物体のとき, ばね $N + 1$ 本. 1 本あたり $k = \boxed{\quad}$

$N \to +\infty$ で $\boxed{\quad}$

換算その 3: 物体番号 $\to$ 長さ

変数 (変位) u_n の今までのの り:

- 物体 N 個 $u_1, u_2, \ldots, u_N$
- 物体 $2N$ 個 $u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots, u_{N+1}, \ldots, u_{2N}$

同じ u_N でも意味が全然違う! $\boxed{}$

$N \to +\infty$ でみんな u_∞!

解決策物体番号 n のかわりに端からの長さ x を使う $(0 \le x \le L)$

- 物体 N 個 $u_1 = u_{x=\frac{L}{N+1}}, \ldots, u_{N/2} = u_{x=\frac{L}{2}}, \ldots, u_N = u_{x=\frac{N}{N+1}L}$
- 物体 $2N$ 個 $u_1 = u_{x=\frac{L}{2N+1}}, \ldots, u_N = u_{x=\frac{L}{2}}, \ldots, u_N = u_{x=\frac{2N}{2N+1}L}$

物体 $N \to +\infty$ でも真ん中は $u_{x=\frac{L}{2}}$. 記法: $u_n(t) \to u_x(t) \to \boxed{}$

換算 4: $u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}$

復習:微分の差分近似

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x+\Delta x) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ 予習問題.

$u_n(t) = u(x,t)$ とする.
$\ell = \frac{1}{N+1}L = \Delta x$ と思う.

$$\begin{aligned}
\text{右辺}/k =& u_{n-1}(t) - 2u_n(t) - u_{n+1}(t) \\
=& u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t) \\
=& \ell^2 \cdot \frac{u(x-\ell) - 2u(x) + u(x-\ell)}{\ell^2} \\
\to& \ell^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}(x,t)
\end{aligned}$$

さいごの行では, 極限 $N \to +\infty$, $\ell \to 0$.

4 個の換算をまとめると

物体番号 n の運動方程式

$$mu_n'' = k(u_{n-1} - 2u_n + u_n)$$

全質量全ばね定数全長固定で物体の個数 $N \to +\infty$. N 物体のとき

$$\frac{M}{N}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = (K(N+1))(\ell)^2 \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2 \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$

$\ell = \Delta x = L/(N+1) \to 0$, $\frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2 \to KL/(M/L) = v^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

ここで, $v^2 = KL/\rho$. 速さの次元を持つ定数.
$\rho = m/L$ は線質量密度 (単位長さあたりの質量), kL は, う〜ん, Young 率と太さに関係した, ばねの材質と断面積から決まる, 長さによらない量.

波動方程式

波動方程式

$u(x,t)$: 弦上の位置 x での時刻 t における変位とする $0 \le x \le L$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 \le x \le L)$$

$v > 0$: 速さの次元を持つ定数
固定端の 境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

この他に初期条件 $u(x,0), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ を定めると解が決まる.

Quiz

Quiz:
長さ L のゴムひものののび $u(x,t)$ は区間 $[0,L]$ の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を満たす. 解 $u(x,t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$ を考える. $v > 0$ は定数.

1. 時刻 $t = \frac{L}{2v}$ における変位の様子を, 横軸 x 縦軸 u で描こう.
2. 点 $x = \frac{3}{4}L$ における変位の変化の様子を, 横軸 t 縦軸 u で描こう.
3. 任意の時刻 t で $u(x,t) = 0$ となっているような点 x をすべて求めよう.
4. $u(x,t)$ が波動方程式を満たすことを確かめよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.60-64,p.80,p.81

- 小形 例題 4.1(p.68)
- 小形 4 章演習問題 [3](p.81)

次回の予習ポイント $y'' = -ay$ 型微分方程式.
予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は月曜夜.
来週は公開授業らしい…