波動方程式の変数分離による解法

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L10(2010-12-14 Tue)

今日の目標

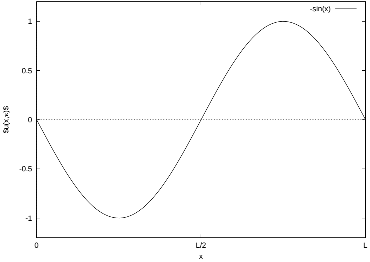
1. 波動方程式の変数分離の解法が説明できる
2. 波動方程式の固有モードが求められる
3. 波動方程式の分散関係が説明できる

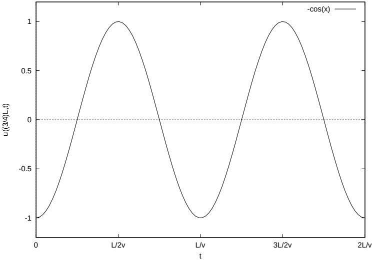
http://hig3.net

Quiz 略解 I

Quiz 略解:

1. $u(x, \frac{L}{2v}) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos\pi = -\sin(\frac{2\pi}{L}x)$
2. $u(\frac{3}{4}L, t) = \sin(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{2\pi v}{L}t) = -\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$.





3. $u(x, t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t) = 0$ が任意の t に対して成立するためには, $\sin(\frac{2\pi}{L}x) = 0$ となる必要があり, また十分である. よって, $x = 0, \frac{1}{2}L, L$.

Quiz 略解 II

4. 左辺 $= -(\frac{2\pi v}{L})^2 \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$.
   右辺 $= -(\frac{2\pi}{L})^2 v^2 \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$

講評

- ゴムは長さ L なので, 1 は範囲 $0 \leq x \leq L$ だけ描く. 3 でもその範囲の解しか意味がない.
- 時間は限定されてないので, $-\infty < t < +\infty$ (からおもしろい部分をセレクト) で描く.
- グラフには軸の名前と, 主要な位置の座標を明示しよう.

波動方程式

波動方程式

$u(x,t)$: 時刻 t での, 弦の位置 x における変位

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$v > 0$: 速さの次元を持つ定数

有限区間 $0 \le x \le L$ で考えるとき, $x = 0, L$ で $\boxed{\qquad\qquad}$ 条件を課すことが必要.
例: 固定端=固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

さらに $\boxed{\qquad\qquad}$ 条件 $u(x,0) = F(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$ を定めると解が定まる.

波動方程式は $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ の一種

波動方程式で記述される世の中の現象

- 音波
- 弦の振動
- 地震波
- 電波 (電磁波)
- 弾性体の振動

いろんな偏微分方程式の出てくる科目

- 現象の数学 A(拡散方程式)
- 計算科学 I(拡散方程式)
- 偏微分方程式 (一般の 1 階偏微分方程式)
- 理論物理 B(シュレーディンガー方程式)
- 電気・磁気 (マクスウェル方程式)

$\leftrightarrow$ 常微分方程式 in 数理モデル基礎, 物理数学

連成振動と波動の比較

	連成振動	波動
変位	$u_n(t)$	$u(x,t)$
時刻	t	t
位置	$n = 1, 2, \ldots, N$	$0 \leq x \leq L$

N 物体の固定端の連成振動では, ℓ 番目の固有モードは

$$u_n^{(\ell)}(t) = \sin(np_\ell) \times \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) = \boxed{}$$

だった.

(偏微分方程式に対する) 変数分離法

$u(x,t) = \boxed{}$ という形の解をさがす.

変数分離法

波動方程式に代入

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(x)g(t)) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x)g(t))$$

この定数を，$-p^2$ とおく．なぜ負?

$$f''(x) = -\,p^2 f(x)$$

$$g''(t) = -\,(pv)^2 g(t)$$

それぞれ一般解は

$$f(x) = A\mathrm{e}^{ipx} + B\mathrm{e}^{-ipx}$$
$$g(t) = C\mathrm{e}^{i(pv)t} + D\mathrm{e}^{-i(pv)t}$$

境界条件から $f(x)$ の形を限定

固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$, つまり, $f(0)g(t) = f(L)g(t) = 0$ より

$$f(0) = A + B = 0 \qquad \text{(き 1)}$$
$$f(L) = A\mathrm{e}^{ipL} + B\mathrm{e}^{-ipL} = 0 \qquad \text{(き 2)}$$

(き 1) より $f(x) = A(\mathrm{e}^{ipx} - \mathrm{e}^{-ipx}) =$ (オイラー) $= \boxed{\qquad\qquad}$

(き 2) より $2iA\sin(pL) = 0 \rightsquigarrow pL = \boxed{\qquad\qquad}$.

つまり $p = \frac{\ell\pi}{L} \quad (\ell \in \mathbb{Z})$. というとびとびの値になる.

ところで, $g(t)$ の形はいままで通り

$$g(t) = C\mathrm{e}^{i(pv)t} + D\mathrm{e}^{-i(pv)t} = \text{(オイラー)} = E\cos(pvt - \theta)$$

波動方程式の固有モード

固定境界条件の波動方程式の固有モード

$$u(x,t) = C\sin(px)\cos(\omega t - \theta)$$

- p:波数. $p = \frac{\ell\pi}{L}$. $\ell \in \mathbb{Z}$ はモード番号.
- ω:固有周波数. 分散関係 $\omega = pv$ で定まる.

比較:連成振動 と 波動

	連成振動	波動
波数 p の現れ方	$\sin(pn)$	$\sin(px)$
波数の単位	無次元 (radian)	radian/m
分散関係	$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p)$	$\omega = vp$
ℓ の範囲	$\ell = 1, 2, \ldots, N$	$\boxed{?}$

波動方程式の固有モードは何個ある?

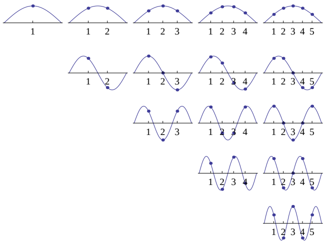
$\ell \in \mathbb{Z}$ っていうけど, 本当にぜんぶいるの?

$$\sin(px) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right)$$

役立たず: $\boxed{\qquad\qquad}$ $\sin(px) = 0$. ほしくない.

かぶってる: $\boxed{\qquad\qquad}$. $C\sin(-px) = (-C)\sin(px)$.

結局, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ で十分.



比較 連成振動では $\ell = 1, 2, \ldots, N$.

固有モードで解はすべて?

そんなはずない!

$u^{(1)}(x,t)=\sin(\frac{\pi}{L}x)\cos(\frac{\pi v}{L}t)$, $u^{(2)}(x,t)=\sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$ はともに解.

このとき, $\boxed{\quad}$ も解 (一般に解の線形結合は解)

なぜなら, 波動方程式は線形だから.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=&\left(A\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}\right)-v^2\left(A^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}\right)\\
=&A\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}\right)+B\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}\right)\\
=&A\cdot 0+B\cdot 0=0
\end{aligned}
$$

波動方程式の一般解

実は, (ある意味) 固有モードの線形結合で解はすべてつくされる.
つまり, 一般解は固有モードの線形結合. 待て Fourier 級数変換.

固定境界条件の波動方程式の一般解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 \le x \le L) \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

の一般解は, 線形結合

$$u(x,t;\theta_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell \, u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$$

ここで $u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$ は $\ell = 1,2,3,\dots$ 番目の固有モード

$$u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell) = \sin(p_\ell x)\cos(p_\ell v t - \theta_\ell)$$

C_ℓ, θ_ℓ: 任意定数

現時点での霊感解法

Quiz (初期値境界値問題)

波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ を,
固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$,
初期条件 $u(x,0) = F(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$,
のもとで解け.

一般解は, 固有モード $u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$ を使って
$u(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$. と書ける. この時点
で $\boxed{}$
ここからが霊感解法
霊感で $C_1 = 3, C_2 = 9, C_3 = 370, \ldots, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \ldots$ (無限個) など決めると,
$u(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$. は初期条件
$u(x,0) = F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$ を満たす. よってそれが求める解.

Quiz

Quiz:
区間 $[0, L]$ で定義された関数 $u(x,t)$ が波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

に従う. ただし, 固定境界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

初期条件

$$u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$

が課されている.
一般解において, 霊感により, 固有モードの係数について $C_2 = C_3 = \cdots = 0$ がわかっているとして, 初期条件を満たすように (霊感を使わずに) C_1, θ_1 を決めよう.

Quiz

固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ のライバルとして,
自由境界条件 $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$ というものがある. 意味?
Quiz:
区間 $[0, L]$ で定義された関数 $u(x,t)$ が波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

に従う. ただし, 自由境界条件 $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$ が課されている.
授業でやったやり方を真似て, $u(x,t) = f(x) \times g(t)$ とおいて固有モードを探そう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 §4.2(p.64-70)

- 小形 例題 4.1(p.68)
- 小形 例題 4.2(p.69)
- 小形 4 章演習問題 [4](p.81)

三角関数の和積公式．フーリエ級数 (計算科学や現象の数学でやった人は)
予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は月曜夜.