波動方程式の初期値境界値問題

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L11(2010-12-21 Tue)

今日の目標

1. 霊感を使って, 初期値境界値問題が解ける.
2. 積分を使って, 初期値境界値問題が解ける.

http://hig3.net

Quiz 略解 I

Quiz 略解: $u(x,t) = f(x)g(t)$ を代入すると,

$$\frac{1}{v^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

左辺は x に関して定数, 右辺は t に関して定数. よって両辺は定数. これを $-p^2$ とおく (この量が負でないと振動にならない).
まず右辺より

$$f''(x) = -p^2 f(x).$$

よって,

$$f(x) = A\mathrm{e}^{ipx} + B\mathrm{e}^{-ipx} \quad \text{すなわち} \quad f'(x) = ip(A\mathrm{e}^{ipx} - B\mathrm{e}^{-ipx}).$$

ここで,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f'(x)g(t)$$

Quiz 略解 II

に注意する. 境界条件 $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ より $g(t)=0$ または $f'(0)=0$ だが, $g(t)=0$ だと $u(x,t)=0$ となって意味がないので $f'(0)=0$ である必要がある. よって $f'(0)=ip(A\mathrm{e}^{ip0}-B\mathrm{e}^{-ip0})=0$ より $A=B$. すなわち $f(x)=2A\cos(px), f'(x)=ipA(\mathrm{e}^{ipx}-\mathrm{e}^{-ipx})=-2Ap\sin(px)$.
境界条件 $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$ より, 同様に $\sin(pL)=0$. よって. $p=\frac{\ell\pi}{L}$ ($\ell\in\mathbb{Z}$) 意味があるのは $\ell=0,1,2,3,\ldots$.
一方左辺より

$$g''(t)=-(vp)^2g(t).$$

よって, $g(t)=C\mathrm{e}^{ipvt}+D\mathrm{e}^{-ipvt}=E\cos(pvt-\theta)$. 固有周波数は $\omega=pv$.
固有モードは $u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)=\cos(p_\ell x)\cos(\omega_\ell t-\theta_\ell)$ ただし $\omega_\ell=vp_\ell$, $p_\ell=\frac{\ell\pi}{L}$ ($\ell=0,1,2,\ldots$).
モード $\ell=0$ が含まれるのは, 自由境界条件なので, $u^{(0)}(x,t)=$ 定数 $\neq 0$ というモードがあるため (実は, $p=0$ は固有方程式の重根であるので $u^{(0)}(x,t)=At+B$ という形が許されるが, これは振動ではないので, 含めるかどうかは場合による).

波動方程式

波動方程式

$u(x,t)$: 時刻 t での, 弦の位置 x における変位

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$v > 0$: 速さの次元を持つ定数
有限区間 $0 \leq x \leq L$ で考えるとき, $x = 0, L$ で境界条件を課すことが必要.
例: 固定端=固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$.
例: 自由端=自由境界条件 $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(L,t) = 0$.

さらに初期条件 $u(x,0) = F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$ を定めると解が定まる.

波動方程式の固有モード

固定境界条件の波動方程式の固有モード

$$
\begin{aligned}
C_\ell u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell) &= C_\ell \sin(p_\ell x)\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) \\
&= \sin(p_\ell x)[A_\ell \cos(\omega_\ell t) + B_\ell \sin(\omega_\ell t)].
\end{aligned}
$$

2 行目: 三角関数の $\boxed{}$

- p_ℓ:波数. $p_\ell = \frac{\ell\pi}{L}$. $\ell \in \mathbb{Z}$ はモード番号.
- ω_ℓ:固有周波数. 分散関係 $\omega_\ell = p_\ell v$ で定まる.
- (C_ℓ, θ_ℓ) または (A_ℓ, B_ℓ): 任意定数

固有モードで解はすべて?

そんなはずない!

$u^{(1)}(x,t) = \sin(\frac{\pi}{L}x)\cos(\frac{\pi v}{L}t)$,

$u^{(2)}(x,t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\boxed{}\,t - 0)$ はともに解.

このとき, $\boxed{}$ も解 (一般に解の線形結合は解)

なぜなら, 波動方程式は線形だから.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =& \left(A\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}\right) - v^2\left(A\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}\right)\\ =& A\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2}\right)\\ =& A\cdot 0 + B\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

数理モデル基礎の線形**常**微分方程式のところで聞いたような話…

波動方程式の一般解

実は, (ある意味) 固有モードの線形結合で解はすべて.
つまり, 一般解は固有モードの線形結合. 待て Fourier 級数変換.

固定境界条件の波動方程式の一般解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 \le x \le L) \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

の一般解は, 線形結合

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell \sin(p_\ell x)\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(p_\ell x)[A_\ell \cos(\omega_\ell t) + B_\ell \sin(\omega_\ell t)] \end{aligned}$$

(どっちでも便利なほうを使ったらいい)
ここで $u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$ は $\ell = 1,2,3,\ldots$ 番目の固有モード. C_ℓ, θ_ℓ: 任意定数

現時点での霊感解法

Quiz (初期値境界値問題)

波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ を,
固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$,
初期条件 $u(x,0) = F(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$,
のもとで解け.

一般解は, 固有モード $u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$ を使って
$u(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$. と書ける. この時点

で $\boxed{}$ OK

ここからが霊感解法

霊感で $C_1 = 3, C_2 = 9, C_3 = 370, \ldots, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \ldots$ などとうまく決めると, $u(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell)$ は初期条件
$u(x,0) = F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$
を満たすようにする. そうできれば, それが求める解.

もうちょっと説得力のある霊感解法

Quiz

固定境界条件の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3\sin(\tfrac{\pi}{L}x).$$

$\boxed{}$のお告げ: $A_2 = A_3 = \cdots = 0, B_2 = B_3 = \cdots = 0.$ $A_1 =?$, $B_1 =?$

$$u(x,t) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)[A_1\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) + B_1\sin(\tfrac{\pi v}{L}t)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)[-A_1\tfrac{\pi v}{L}\sin(\tfrac{\pi v}{L}t) + \tfrac{\pi v}{L}B_1\cos(\tfrac{\pi v}{L}t)]$$

もっと説得力のある霊感解法

Quiz

固定境界条件の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x) - 3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

もっと説得力のある霊感解法

Quiz

固定境界条件の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x).$$

霊感解法卒業前夜

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \ \mathrm{d}\theta = \tfrac{\pi}{2}\delta_{nm} = \tfrac{\pi}{2} \times \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

クロネッカーの δ 記号

変数変換 $\theta = \frac{\pi}{L}x$

$$\boxed{} = \delta_{nm}$$

$\boxed{}$ は正規直交基底.

もっと説得力のある霊感解法

Quiz

固定境界条件の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = 1 - \cos(\tfrac{2\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)[A_\ell \cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)] \\ &= A_1 \sin(\tfrac{1\pi}{L}x)\cos(\tfrac{1\pi v}{L}t) + A_2 \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\cos(\tfrac{2\pi v}{L}t) + \cdots + [B] \end{aligned}$$

B_ℓ はさっきののりで $\frac{\partial u}{\partial x}$ を考えるとぜんぶ 0 とわかる.

$\boxed{}$ 両辺に $\boxed{}$

Quiz

Quiz:
区間 $[0,L]$ で, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える ($L, v > 0$ は定数).
固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$,
初期条件 $u(x,0) = x^2 - Lx$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$
のもとで解を求めよう. ただし, 解は固有モードの和として書けばいい.
しかも公式 $\int_0^\pi \theta \sin n\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{(-1)^n \pi}{n}$,
$\int_0^\pi \theta^2 \sin n\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2((-1)^n - 1))}{n^2} - \frac{(-1)^n \pi^2}{n}$ を使っちゃっていい.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題
Fourier 級数変換 小形 §4.3, 自由端 小形 p.75-78)

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- Fourier 級数展開 小形 第 4 章演習問題 [1](p81),[6][8](p.82)