

波動方程式のフーリエ級数変換による解法

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

現象の数学 B L12(2011-01-11 Tue)

今日の目標

- 1 積分を使って, 初期値境界値問題が解ける.



<http://hig3.net>

Quiz 略解

Quiz 略解: 靈感で (実は, 初期条件には固有モード $\ell = 1, 2$ だけが現れているので), $A_3 = A_4 = \dots = B_3 = B_4 = \dots = 0$ として,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{\ell=1}^2 C_{\ell} u^{(\ell)}(x, t; \theta_{\ell}) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \left[A_1 \cos\left(\frac{\pi v}{L}t\right) + B_1 \sin\left(\frac{\pi v}{L}t\right) \right] \\ &\quad + \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \left[A_2 \cos\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) \right] \end{aligned}$$

とおいてみる. 初期条件より,

$$u(x, 0) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) A_1 + \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) A_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \left(-\frac{\pi v}{L}\right) B_1 + \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \left(-\frac{2\pi v}{L}\right) B_2$$

よって, $A_1 = -2, B_2 = \frac{3L}{2\pi v}, A_2 = B_1 = 0$. 結局,

$$u(x, t) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi v}{L}t\right) + \frac{3L}{2\pi v} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi v}{L}t\right)$$

靈感解法卒業前夜

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta =$$



正弦関数の積の積分

$$e_n(x) = \boxed{} \sin \frac{n\pi}{L}x \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ に対して}$$

$$\int_0^L e_n(x)e_m(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

もうちょっと練習.

$\theta^n \sin \theta$ の不定積分

$$\int \sin \theta \, d\theta = -\cos \theta$$

$$\int \theta \sin \theta \, d\theta = -\theta \cos \theta + \sin \theta$$

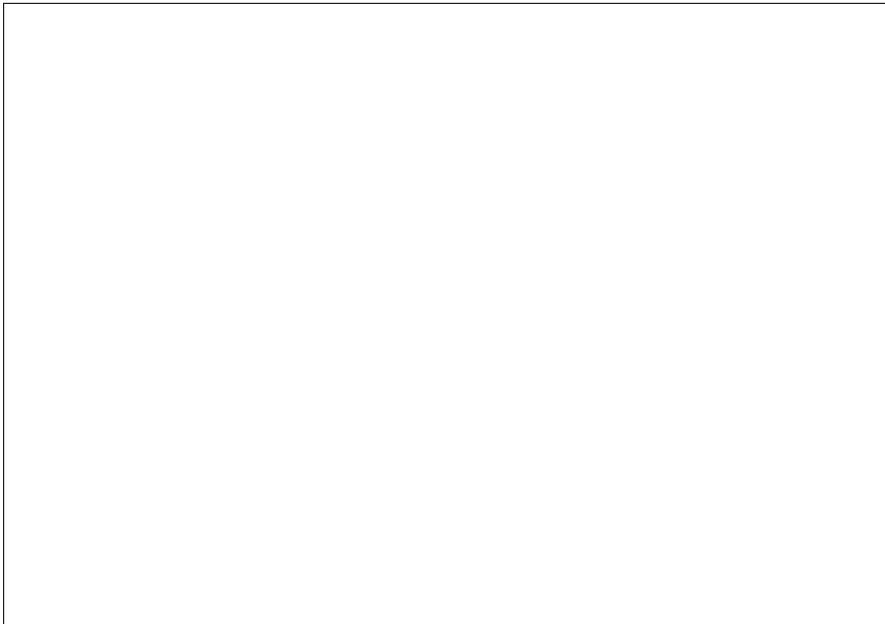
$$\int \theta^2 \sin \theta \, d\theta = (\theta^2 - 2) \cos \theta + 2\theta \sin \theta$$

$$\vdots$$

これは、部分積分を繰り返して証明できる.

じゃあ

$$\int_0^L x^2 \sin \frac{\ell\pi}{L} x \, dx = \square$$



靈感解法卒業

Quiz

固定境界条件の波動方程式を、次の初期条件のもとで解け。

$$u(x, 0) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

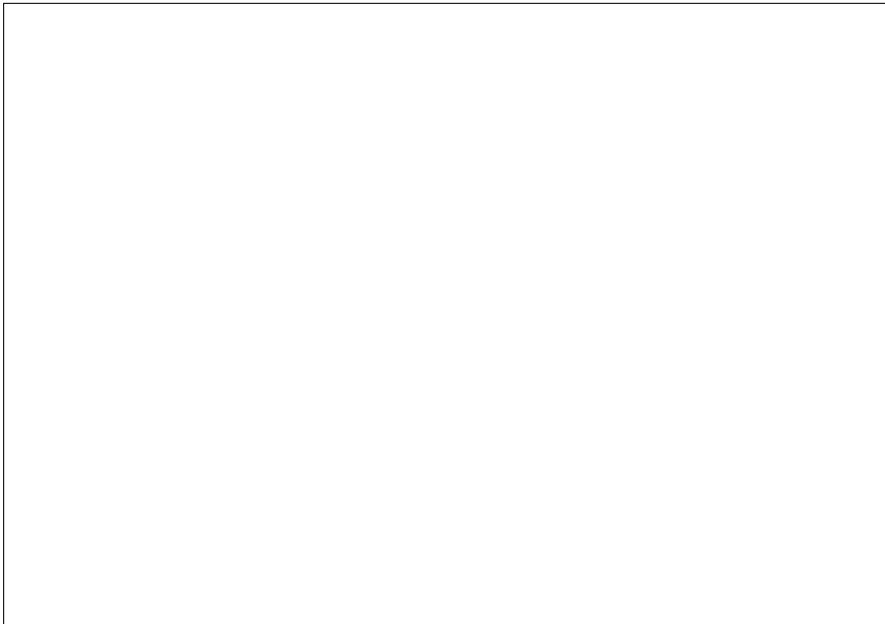
固有モードの知識から、

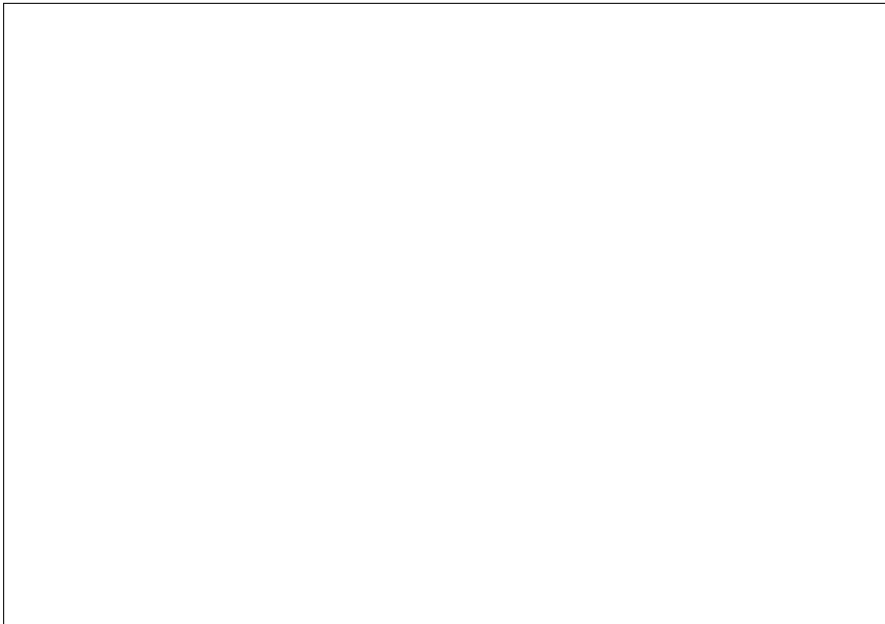
$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right) \left[A_{\ell} \cos\left(\frac{\ell\pi v}{L}t\right) + B_{\ell} \sin\left(\frac{\ell\pi v}{L}t\right) \right] \\ &= A_1 \sin\left(\frac{1\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{1\pi v}{L}t\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) + \cdots + [B] \end{aligned}$$

とかける。まず $u(x, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ のを書く。境界条件から A_{ℓ}, B_{ℓ} を定めよ

う。靈感がないので、両辺に







三角関数の正規直交関係

$e_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L}x$ に対して

$$\int_0^L e_\ell(x)e_m(x) dx = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq m) \\ 1 & (\ell = m) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell e_\ell(x)$, という展開をフーリエ級数展開という.

両辺に $\int_0^L dx e_m(x) \times$ することで, $c_m = \int_0^L e_m(x)f(x) dx$ と求められる (フーリエ級数変換)

どっかでみたことない?

ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする.

$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を
とるとき,

$$c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}$$

となるように係数 c_1, c_2, c_3 を決めよう.

靈感解法 c_1, c_2, c_3 を適当にきめてあうかどうかやってみる.

ちょっと進歩した靈感解法 各成分で, c_1, c_2, c_3 についての連立方程式をたててとく (去年の方法)

フーリエ級数変換 $c_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}$ (今年の方法)

$\langle e_\ell(x) \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x \right\rangle_{\ell=1,2,3,\dots}$ は正規直交基底. そのときの内積は

$$f \cdot g = \int_0^L f(x)g(x) dx$$

Quiz

Quiz:

区間 $[0, L]$ で、波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

を考える ($L, v > 0$ は定数).固定境界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$,初期条件 $u(x, 0) = x^2 - Lx, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

のもとで解を求めよう. ただし, 解は固有モードの和として書けばいい.
しかも上で出てきた公式はぜんぶ使っちゃっていい.

ファイナルトリアル計画! I

外部記憶ペーパーありです. 別紙参照.

おすすめの準備方法 去年のファイナルトリアルの問題と略解は公開してるけど, それより下のリストに従って各回の quiz を復習しておくこと
をお奨めします. 模範解答を作ろうプロジェクトもやってます.

出題計画 2010-01-18 に情報を更新します.

- 15 点 2 物体の連成振動の基準座標と固有周波数を求めよう (プチテスト 1 再出題)
- 15 点 3 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう (プチテスト 2 改)
- $u(x, t)$ のグラフを描こう etc.(L09)
 - N 物体の連成振動の何か (未定)
 - 未定.
 - 決まった境界条件のもとで, 波動方程式の固有モードを求めよう
 - 初期値問題の靈感解法 (L11)

ファイナルトライアル計画! II

- フーリエ級数変換を利用した初期値問題の解 (L12)
- ダランベールの進行波解 (L13)

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

フーリエ級数変換 小形 §4.3, 自由端 小形 p.75-78

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- フーリエ級数展開 小形 第4章演習問題 [1](p81), [6][8](p.82)

連絡

公務欠席届の提出機会は、今日の講義前後、来週の講義前後、ファイナルトライアルの講義前後、だけに限られます。まだ提出していない分がある人は用意しておいてね。