波動方程式のフーリエ級数変換による解法

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L12(2011-01-11 Tue)

今日の目標

1. 積分を使って, 初期値境界値問題が解ける.

http://hig3.net

Quiz 略解

Quiz 略解: 霊感で (実は, 初期条件には固有モード $\ell = 1, 2$ だけが現れているので), $A_3 = A_4 = \cdots = B_3 = B_4 = \cdots = 0$ として,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{\ell=1}^{2} C_\ell u^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell) \\ &= \sin(\tfrac{\pi}{L}x)[A_1\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) + B_1\sin(\tfrac{\pi v}{L}t)] \\ &\quad + \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)[A_2\cos(\tfrac{2\pi v}{L}t) + B_2\sin(\tfrac{2\pi v}{L}t)] \end{aligned}$$

とおいてみる. 初期条件より,

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)A_1 + \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)A_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)(-\tfrac{\pi v}{L})B_1 + \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)(-\tfrac{2\pi v}{L})B_2$$

よって, $A_1 = -2, B_2 = \frac{3L}{2\pi v}, A_2 = B_1 = 0$. 結局,

$$u(x,t) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) + \frac{3L}{2\pi v}\sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\sin(\tfrac{2\pi v}{L}t)$$

霊感解法卒業前夜

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \ \mathrm{d}\theta = \boxed{}$$

正弦関数の積の積分

$e_n(x) = \boxed{\quad\quad} \sin \frac{n\pi}{L} x \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ に対して

$$\int_0^L e_n(x) e_m(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

もうちょっと練習.

$\theta^n \sin\theta$ の不定積分

$$\int \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = -\cos\theta$$

$$\int \theta\sin\theta \,\mathrm{d}\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta$$

$$\int \theta^2\sin\theta \,\mathrm{d}\theta = (\theta^2 - 2)\cos\theta + 2\theta\sin\theta$$

$$\vdots$$

これは, 部分積分を繰り返して証明できる.
じゃあ

$$\int_0^L x^2 \sin\frac{\ell\pi}{L}x \,\mathrm{d}x = \boxed{}$$

霊感解法卒業

Quiz

固定境界条件の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = 1 - \cos(\tfrac{2\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

固有モードの知識から,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)[A_\ell \cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)] \\ &= A_1 \sin(\tfrac{1\pi}{L}x)\cos(\tfrac{1\pi v}{L}t) + A_2 \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\cos(\tfrac{2\pi v}{L}t) + \cdots + [B] \end{aligned}$$

とかける. まず $u(x,0), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ のを書く. 境界条件から A_ℓ, B_ℓ を定めよう. 霊感がないので, 両辺に $\boxed{}$

三角関数の正規直交関係

$e_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x$ に対して

$$\int_0^L e_\ell(x) e_m(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq m) \\ 1 & (\ell = m) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell e_\ell(x)$, という展開をフーリエ級数展開という.

両辺に $\int_0^L \mathrm{d}x \; e_m(x) \times$ することで, $c_m = \int_0^L e_m(x) f(x) \, \mathrm{d}x$ と求められる (フーリエ級数変換)

どっかでみたことない?

ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする.

$\boxed{}$ $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ をとるとき,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}$$

となるように 係数 c_1, c_2, c_3 を決めよう.

霊感解法 c_1, c_2, c_3 を適当にきめてあうかどうかやってみる.

ちょっと進歩した霊感解法 各成分で, c_1, c_2, c_3 についての連立方程式をたててとく (去年の方法)

フーリエ級数変換 $c_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}$ (今年の方法)

$\langle e_\ell(x) \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x \right\rangle_{\ell=1,2,3,\cdots}$ は正規直交基底. そのときの内積は

$$f \cdot g = \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Quiz

Quiz:
区間 $[0, L]$ で, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える ($L, v > 0$ は定数).
固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$,
初期条件 $u(x,0) = x^2 - Lx$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$
のもとで解を求めよう. ただし, 解は固有モードの和として書けばいい.
しかも上で出てきた公式はぜんぶ使っちゃっていい.

ファイナルトライアル計画! I

外部記憶ペーパーありです. 別紙参照.

おすすめの準備方法 去年のファイナルトライアルの問題と略解は公開してるけど, それより下のリストに従って各回の quiz を復習しておくことをお奨めします. 模範解答を作ろうプロジェクトもやってます.

出題計画 2010-01-18 に情報を更新します.

15 点 2 物体の連成振動の基準座標と固有周波数を求めよう (プチテスト 1 再出題)

15 点 3 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう (プチテスト 2 改)

- $u(x,t)$ のグラフを描こう etc.(L09)
- N 物体の連成振動の何か (未定)
- 未定.
- 決まった境界条件のもとで, 波動方程式の固有モードを求めよう
- 初期値問題の霊感解法 (L11)

ファイナルトライアル計画! II

- フーリエ級数変換を利用した初期値問題の解 (L12)
- ダランベールの進行波解 (L13)

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

フーリエ級数変換 小形 §4.3, 自由端 小形 p.75-78)

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- フーリエ 級数展開 小形 第 4 章演習問題 [1](p81),[6][8](p.82)

連絡

公務欠席届の提出機会は, 今日の講義前後, 来週の講義前後, ファイナルトライアルの講義前後, だけに限られます. まだ提出していない分がある人は用意しておいてね.