波動方程式の進行波解

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L13(2011-01-18 Tue)

今日の目標

1. フーリエ級数変換を使って, 初期値境界値問題が解ける.
2. 進行波解の時間発展が求められる.

http://hig3.net

訂正

先週の例題のフーリエ級数変換の値は,

$$A_m = \frac{1}{\pi}(1-(-1)^m)(\tfrac{2}{m} - \tfrac{1}{m+2} - \tfrac{1}{m-2})$$

が正しい値 (因子 $\sqrt{\frac{2}{L}}$ は余計) でした. ご指摘くださった方ありがとうございました. おわびして訂正します.

Quiz 略解

$$\int_0^L x^2 \sin \tfrac{\ell\pi}{L} x \, \mathrm{d}x = \frac{2L^3}{\ell^3\pi^3}(1-(-1)^\ell) + \frac{L^3(-1)^\ell}{\ell\pi}$$

Quiz 略解: $c_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{u} = \frac{3}{2}, c_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{u} = \frac{3}{2}$

霊感解法卒業

区間 $[0, L]$ で, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える ($L, v > 0$ は定数).
固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$,
初期条件 $u(x,0) = \begin{cases} x & (0 \le x \le \frac{1}{2}L) \\ L - x & (\frac{1}{2}L \le x \le L) \end{cases}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$
のもとで解を求めよう. ただし, 解は固有モードの和として書けばいい.

解答例

一般解は, 固有モードの線形結合として,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin\tfrac{\ell\pi}{L}x[A_\ell \cos\tfrac{\ell\pi v}{L}t + B_\ell \sin\tfrac{\ell\pi v}{L}t] \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sqrt{\tfrac{2}{L}}\sin\tfrac{\ell\pi}{L}x\left[\sqrt{\tfrac{L}{2}}A_\ell \cos\tfrac{\ell\pi v}{L}t + \sqrt{\tfrac{L}{2}}B_\ell \sin\tfrac{\ell\pi v}{L}t\right] \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} e_\ell(x)[a_\ell \cos\tfrac{\ell\pi v}{L}t + b_\ell \sin\tfrac{\ell\pi v}{L}t].
\end{aligned}
$$

$e_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\ell\pi}{L}x$. 定数 $a_\ell = \sqrt{\frac{L}{2}}A_\ell, b_\ell = \sqrt{\frac{L}{2}}B_\ell$. 初期条件より,

$$
u(x,0) = \left\{\begin{array}{ll} x & (0 \le x \le \frac{1}{2}L) \\ L-x & (\frac{1}{2}L \le x \le L) \end{array}\right\} = \sum_{\ell=1}^{\infty} e_\ell(x)[a_\ell \cdot 1 + b_\ell \cdot 0] \qquad (1)
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 = \sum e_\ell(x)[a_\ell \cdot \tfrac{\ell\pi v}{L} \cdot 0 + b_\ell \cdot \tfrac{\ell\pi v}{L} \cdot 1] \qquad (2)
$$

(2) の両辺に $\int_0^L \mathrm{d}x\, e_m(x)\times$ する. $m = 1, 2, 3, \cdots$

$$\int_0^L e_m(x) \times \text{右辺}\, \mathrm{d}x$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^L e_m(x) \times e_\ell(x)\, \mathrm{d}x \times \frac{\ell\pi v}{L} b_\ell$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \boxed{} \frac{\ell\pi v}{L} b_\ell$$
$$= \boxed{}$$

$$\int_0^L e_m(x) \times \text{左辺}\, \mathrm{d}x = 0.$$

つまり $b_m = 0$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$

(1) の両辺に $\int_0^L \mathrm{d}x e_m(x)\times$ する. $m = 1, 2, 3, \cdots$

さっきと同様に $\int_0^L e_m(x) \times$ 右辺 $\mathrm{d}x = \boxed{}$

$\int_0^L e_m(x) \times$ 左辺 $\mathrm{d}x$

$$= \boxed{}$$

$$= \int_0^{L/2} \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{m\pi}{L} x \times x \, \mathrm{d}x + \int_{L/2}^{L} \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{m\pi}{L} x \times (L - x) \, \mathrm{d}x$$

$$= \cdots = \frac{(2L)^{3/2}}{\pi^2} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi}{2}$$

m が偶のとき 0 になることに注意して, $k = 0, 1, 2, \cdots$ により,

$$a_{2k+1} = \frac{(2L)^{3/2}}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2} (-1)^k, a_{2k+2} = 0$$

よって, 初期条件を満たす解は

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e_{2k+1}(x)\left[\tfrac{(2L)^{3/2}}{\pi^2}\tfrac{1}{(2k+1)^2}(-1)^k \cos\tfrac{(2k+1)\pi v}{L}t\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{4L}{\pi^2}\tfrac{1}{(2k+1)^2}(-1)^k \sin\tfrac{(2k+1)\pi}{L}x \cos\tfrac{(2k+1)\pi v}{L}t \\
&= \tfrac{4L}{\pi^2}\left[\tfrac{1}{1^2}\sin\tfrac{\pi}{L}x\cos\tfrac{\pi v}{L}t - \tfrac{1}{3^2}\sin\tfrac{3\pi}{L}x\cos\tfrac{3\pi v}{L}t\right. \\
&\quad \left. + \tfrac{1}{5^2}\sin\tfrac{5\pi}{L}x\cos\tfrac{5\pi v}{L}t + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

アニメ参照.

進行波解 (ダランベールの解)

進行波解 (ダランベールの解)

$u(x,t)$ について, 次の 2 つは同値.

- 波動方程式
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
の解である
- 適当な 1 変数関数 $f(x), g(x)$ を用いて
$$u(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$$
と書ける

'書けるなら解である' ことの証明

$$\text{右辺} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x - vt) = v^2 g''(x - vt).$$

$$\text{左辺} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x - vt) = \boxed{} = (-v)^2 g''(x - vt)$$

f も同様. 線形なので $f + g$ も解.

'解であるなら書ける' ことの証明

$$
\begin{aligned}
&\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\ell\pi vt}{L}-\theta_\ell)\\
=&\text{積和公式}\\
=&\tfrac{1}{2}[\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x+\tfrac{\ell\pi vt}{L}-\theta_\ell)+\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x-\tfrac{\ell\pi vt}{L}+\theta_\ell)]\\
=&\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x+vt)-\theta_\ell)+\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x-vt)+\theta_\ell)\\
=&f(x+vt)+g(x-vt)
\end{aligned}
$$

$f(x+vt)$ の意味

波形 $y=f(x)$ を, $-vt$ だけ x 方向に平行移動したもの.
$y=f(x)$ の形を保ったまま

$g(x-vt)$ は
$y=g(x)$ の形を保ったまま

進行波解

波動方程式の解は,

波動方程式に現れる定数 v は進行波の速さ.

話せなかったこと: 固定端, 自由端での波の ‘反射’

Quiz

Quiz:

$u(x,t) = f(x + \frac{1}{3}t) + f(x - \frac{1}{3}t)$, ただし

$$f(z) = \begin{cases} 2 - |z| & (|z| \leq 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする.

1. $t = 6$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.
2. $t = 0$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.
3. $t = 3$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

フーリエ級数変換 小形 §4.3, 自由端 小形 p.75-78)

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- フーリエ 級数展開 小形 第 4 章演習問題 [1](p81),[6][8](p.82)

進行波解 小形 §6.4

- 進行波解 小形 第 6 章演習問題 [1][3](p131),[8][10][11](p.132)

復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は月曜夜.

連絡

公務欠席届の提出機会は, 今日の講義前後, ファイナルトライアルの前後, だけに限られます. まだ提出していない分がある人は用意しておいてね.

お願い授業アンケートにご協力お願いします.

- 学部:5, 学科:a

ファイナルトライアル計画! I

外部記憶ペーパーありです．別紙参照．

おすすめの準備方法 去年のファイナルトライアルの問題と略解は公開してるけど，それより下のリストに従って各回の quiz を復習しておくことをお奨めします．模範解答を作ろうプロジェクトもやってます．

出題計画

15 点 2 物体の連成振動の基準座標と固有周波数を求めよう (プチテスト 1 再出題)

15 点 3 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう (プチテスト 2 改)

- N 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう．N 物体の場合の公式を導く過程は不要 (ゼロから導出しなくてよい) ですが，quiz では書いてあった分散関係 etc は問題に載せません．おぼえるか外部記憶ペーパーに書いておこう．(quiz L08)
- $u(x,t)$ のグラフを描こう etc.(quiz L09)

ファイナルトライアル計画! II

- 波動方程式の意味. 弦の振動で t, x, v, u は何を表しているか (L09,L13)
- 変数分離法を使って, 波動方程式の解を求めよう. 固定/自由境界条件を課す部分は質問しません (L10)
- 初期値問題の霊感解法 (quiz L11)
- 初期値問題のフーリエ級数変換を利用した解 (L12, L13 復習) $e_m(x)$ の正規直交関係はおぼえるか外部記憶ペーパーに書いておこう. それ以外の難しそうな積分の公式は問題に載せます.
- 進行波解を描こう (quiz L13)