物理数学☆演習 I ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2004 年 07 月 28 日更新: Time-stamp: "2004/07/28 Wed 14:40 hig"

ファイナルトライアル参加の際の注意ポイント

1. **全部で 5 問です.**
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. 答案は返却しません. アドレス (`t040nnna@ryukoku-u.jp`) への点数の通知を 8 月 10 日以前に行います. このメールは,

   `http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/`

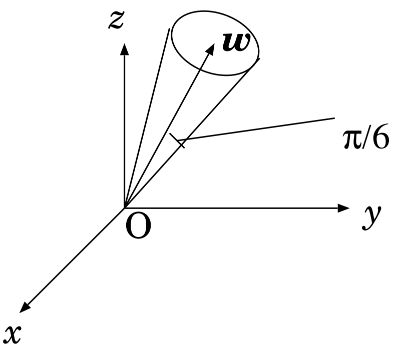
   で読めます. パスワードを忘れた場合は, メディア教育課で再発行をお願いしましょう. また, 携帯から読むこともできます. `http://hig3.net` > 生協 Web メール です.

`http://hig3.net`

1

原点にスポットライトがあり, ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 方向に, 広がりの角 $\frac{\pi}{6}$ で円錐状に広がる光を発している.

つまり, 光の当っている領域は, 原点を頂点とする, 無限に高い, 傾いた円錐であり, ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ は円錐の中心軸に平行で, 頂点から底面に向かう向きである. (図の描き方は不正確です.) また, 円錐の軸と母線のなす角は $\pi/6$ である.



質量 $m = 1$ の物体が $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 9 \end{pmatrix}$ にしたがって運動している.

1. $\boldsymbol{w}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}(t)$ を求めよう.
3. $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r}(t)$ を求めよう.
4. 物体に光が当っている時間帯を求めよう.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

2

物体の, 原点を中心とする xy 平面内の等速円運動

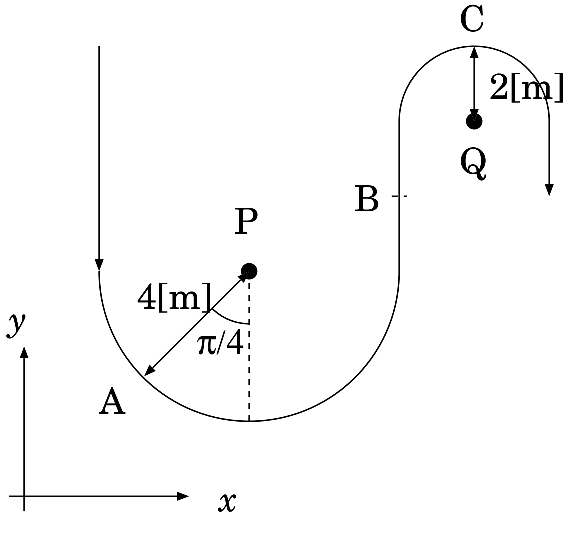
$$\boldsymbol{r}_1(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\phi) \\ R\sin(\omega t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える．ここで, t は時刻, $R > 0, \omega, \phi$ は定数である．また, 時刻 $t = 0$ には物体は $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 上にあり, この点に次に戻ってくるのは $t = 2$ である．

1. 等速円運動の周期, 角速度, 振動数を求めよう．
2. 定数 R, ϕ の値を求めよう．
3. 物体が, 平面 $y = 2$ を通過する時刻を求めよう．

3

1. 質量 $m = 4$[kg] の物体が, 力を受けて, xy 平面上を, 図の軌跡に沿って, 矢印の向きに, 速さ 3[m/s] で等速運動している．図の点 A,B,C での物体の速度ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}$, 物体に固定された座標系から見たときに物体の受ける慣性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}$ を, 例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のように成分表示で答えよう．
   ただし, 点 A, C の近くでは軌跡は半円であり, 物体は等速円運動する．点 B の近くでは軌跡は直線である．



2. 質量 $M = 1$ [kg] の台車に, 質量 $m = 10$ [g] の鉛筆を立てて, 台車を,

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \begin{pmatrix} t^6 - 10t^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{[cm]} \tag{2}$$

   にしたがって動かした．鉛筆のうける慣性力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t)$ を, 単位 N (ニュートン) で答えよう．

4

質量 $m=3$ の物体が力を受けて運動している. 時刻 t における物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$, 物体の受けている力を

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} -96\mathrm{e}^{-4t} \\ 12\mathrm{e}^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

とする. また,

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

とする.

1. 時刻 t における速度ベクトル $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ を求めよう.
2. 時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう.
3. 時間帯 $-1 \leqq t \leqq 1$ における, 物体の運動の軌跡を描こう.

5

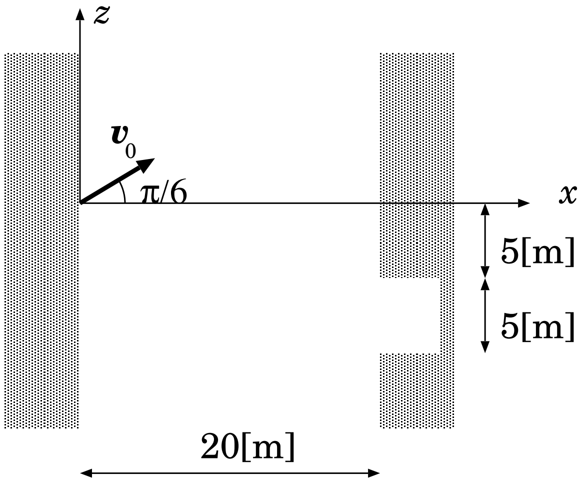
重力のもとでの, 質量 m [kg] の物体の運動を考える. 図のように, 座標軸を, x 軸が水平, z 軸の正の向きが鉛直上向きになるようにとる. ただし, 原点は, 地表面でなく, 高い壁の途中の点とする.

原点から, 時刻 $t=0$ に, 物体を, 速さ $|\boldsymbol{v}_0| = 20/\sqrt{3}$[m/s], 図のように x 軸の正の向きから上に $\pi/6$ ずらした向きに発射する.

時刻 t における物体の位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

とする. ただし, 重力加速度の大きさを $g=9.8[\mathrm{m/s^2}]$ とする.



1. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)$ の x 成分, z 成分を答えよう.
2. $\boldsymbol{r}(t)$ $(t \geqq 0)$ を求めよう.
3. 図のように, 20[m] 先にある壁に空いた穴に物体が飛び込むかどうかを判定しよう.

このページは白紙です

物理数学☆演習 I ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2004 年 07 月 28 日更新: Time-stamp: "2004/07/28 Wed 14:40 hig"

1

1. $\frac{1}{|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{w} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{w} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$.
2. $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix}+9+5t\\-9+5t\\-2t\end{pmatrix}$.
3. $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r}(t) = 45$.
4. ベクトル $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{r}(t)$ のなす角が $\pi/6$ 以下である時間帯は, $\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{r}(t)|} \geqq \cos\frac{\pi}{6}$ より, $-\sqrt{\frac{19}{2}} \leqq t \leqq +\sqrt{\frac{19}{2}}$.

2

1. 周期すなわち戻ってくるまでの時間 $T = 2$. 振動数 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$, 角速度 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.
2.

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos(\pi\cdot 0+\phi)\\R\sin(\pi\cdot 0+\phi)\\0\end{pmatrix} \tag{6}$$

を解いて, $R = 4$, $\phi = \frac{\pi}{2}$. ($\phi = \frac{\pi}{4} + 2n'\pi$ (n' は整数) でもよい)

3. 平面を通過する時刻を $t = T$ とする. $y(T) = 4\sin(\pi T + \frac{\pi}{2}) = 2$ を解いて, $\pi T + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$, ($n$ は整数). すなわち, $T = \pm\frac{1}{3} + 2n$.

3

1. 等速運動なので, $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}| = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}| = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}| = 3[\mathrm{m/s}]$ であり, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}$ はそれぞれ, A,B,C で軌跡に接することから,

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix}3/\sqrt{2}\\-3/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}[\mathrm{m/s}], \quad \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}[\mathrm{m/s}], \quad \boldsymbol{v}_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}[\mathrm{m/s}]. \tag{7}$$

以下, 点 A,B,C における物体の加速度を $\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$ とおく.
点 B では物体は等速直線運動しており, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{0}$ なので, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{0}$.
点 A では, 物体は半径 $R = 4$ の等速円運動をしている. 角速度の大きさを ω とすると, $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}| = R\omega$ より, $\omega = \frac{3}{4}$. よって, $|\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}| = R\omega^2 = \frac{9}{4}$. 加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}$ の向きは中心向き. 慣性力 (遠心力) は,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}} = -m\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}\begin{pmatrix}-9/\sqrt{2}\\-9/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}[\mathrm{N}]. \tag{8}$$

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

同様に,

(9) $\quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}}=\begin{pmatrix}0\\18\\0\end{pmatrix}$ [N].

2. $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t)=-m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t)=-10[\mathrm{g}]\times\begin{pmatrix}30t^4-120t^2\\0\\0\end{pmatrix}[\mathrm{cm/s}^2]\times\frac{1[\mathrm{kg}]}{1000[\mathrm{g}]}\times\times\frac{1[\mathrm{m}]}{100[\mathrm{cm}]}=\begin{pmatrix}12t^2-3t^4\\0\\0\end{pmatrix}\times10^{-5}[\mathrm{N}].$

4

1. 運動方程式

(10) $\quad 3\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)=\begin{pmatrix}-96\mathrm{e}^{-4t}\\12\mathrm{e}^{-2t}\\0\end{pmatrix}$

の両辺を積分して

(11) $\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)=\begin{pmatrix}8\mathrm{e}^{-4t}+C_1\\-2\mathrm{e}^{-2t}+C_2\\0+C_3\end{pmatrix}.$

初期条件より積分定数を定めて

(12) $\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)=\begin{pmatrix}8\mathrm{e}^{-4t}\\-2\mathrm{e}^{-2t}\\0\end{pmatrix}.$

2. もう一度積分して,

(13) $\quad \boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-4t}+D_1\\\mathrm{e}^{-2t}+D_2\\0+D_3\end{pmatrix}.$

初期条件より積分定数を定めて

(14) $\quad \boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-4t}\\\mathrm{e}^{-2t}\\0\end{pmatrix}.$

3. t を消去すると, $x=-2y^2, z=0$. 時間帯が $-1\leqq t\leqq+1$ なので, この xy 平面上の放物線の, $\mathrm{e}^{-2}\leqq y\leqq\mathrm{e}^{+2}$ の部分.

5

1. x 成分は $|\boldsymbol{v}_0|\cos\frac{\pi}{6}=10[\mathrm{m/s}]$, z 成分は $|\boldsymbol{v}_0|\sin\frac{\pi}{6}=10/\sqrt{3}[\mathrm{m/s}]$,
2. 運動方程式

(15) $\quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)=mg\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

を, 初期条件

(16) $\quad \boldsymbol{r}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(0)=\begin{pmatrix}10\\0\\10/\sqrt{3}\end{pmatrix}[\mathrm{m/s}]$

のもとで解いて,

(17) $\quad \boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix}10t\\0\\-\frac{1}{2}gt^2+\frac{10}{\sqrt{3}}t\end{pmatrix}[\mathrm{m}].$

3. $x=20[\mathrm{m}]$ となる時刻 $t=T$ は, $x(T)=20$ から求まり, $T=2[\mathrm{s}]$. $z(T)=\cdots=-8.1, -10\leqq-8.1\leqq-5$ より, 穴に飛び込む.