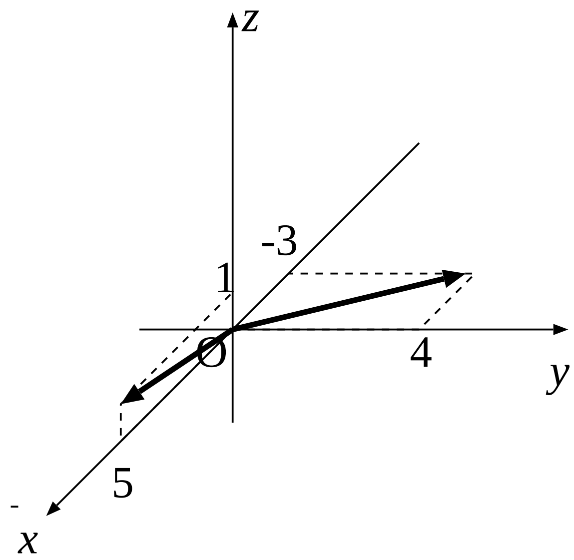
樋口さぶろお[a] 更新 `Time-stamp: "2004/05/22 Sat 14:15 hig"`

quiz 略解 1

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-13\\4\\-2\end{pmatrix},\quad c\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9\\-12\\0\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}|=5,\quad |\boldsymbol{B}|=\sqrt{26}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-15,\quad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4\\3\\-20\end{pmatrix}$$



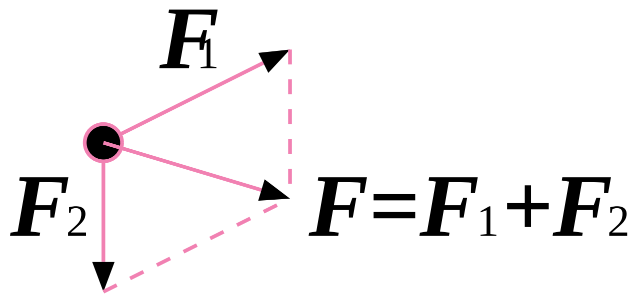
http://hig3.net/(講義のページもここから) mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp

2. 内積，外積と力のバランス

2.1 力はベクトル

香中 p.3

力 は向きと大きさを持ち，ベクトルで表される．大きさの単位はニュートン $\mathrm{N}{=}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$.

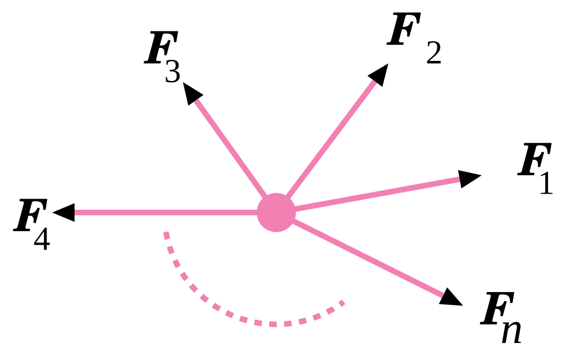


物体に，2 つの力 $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が

同時にはたらいているのは，1 つの力 (15) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ がはたらいているのと同じこと．

物体にはたらくすべての力の合力が

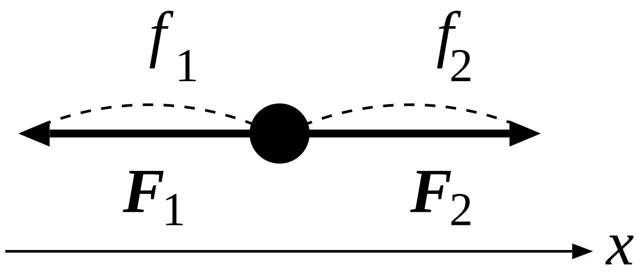
$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{0}} \qquad (24)$$



のとき，力は つりあっている，つりあいの状態にある という．このとき，止まっていた物体は止まったまま．

2.2 ベクトルの和と綱引き

図の場合, $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ **のときつりあっている**.
力の大きさ $f_1, f_2 (> 0)$ **で書くと**,



$$f_1 = f_2 \quad \textbf{つまり} \quad f_1 - f_2 = 0 \tag{25}$$

がつりあいの条件.

f_1 と F_1 の関係

$$f_1 = |\boldsymbol{F}_1| (> 0), \quad f_2 = \boxed{16 \qquad} (> 0), \tag{26}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \boxed{17 \qquad}, \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} +f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ **はベクトル**, **力の大きさ** f_1, f_2 **はスカラー**.

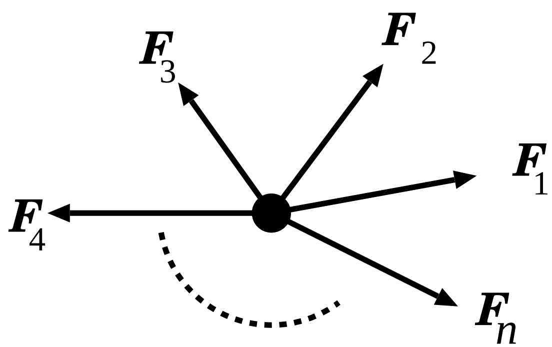
例題 3

マルチ綱引きの 4 チームが, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4$ の力で引いたところ, つりあいの状態になって綱は動かなかった.

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

のとき, $\boldsymbol{F}_4$ を求めよう. いちばん力の大きいチームはどれ?

気をつけてね: 図で, ベクトルは, 綱の長さとは関係ない. 引く力の大きさ (強さ) を表している.

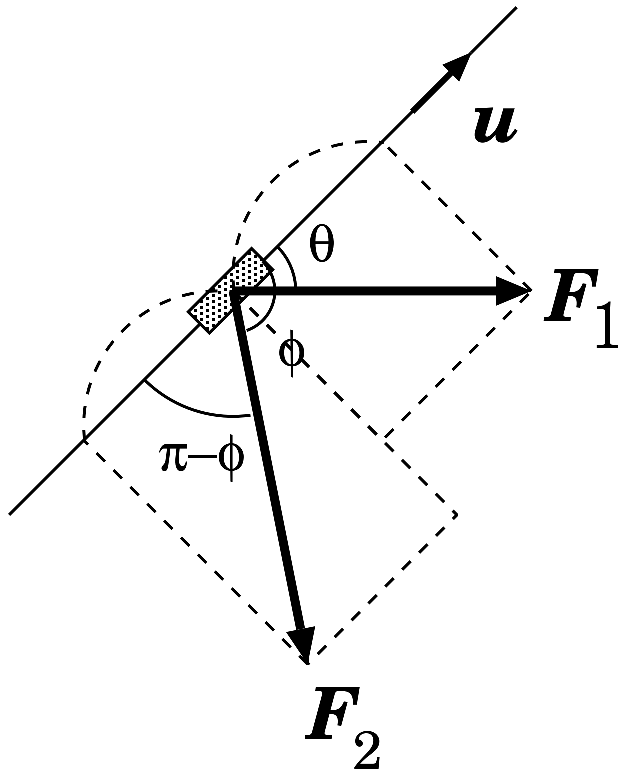


18

2.3 ベクトルの内積と列車の綱引き

線路上しか動けない列車に綱をつけて綱引き!

$\boldsymbol{F}_1$ を線路に平行なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\parallel}$ と垂直なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\perp}$ に分解して考える.



$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{1\parallel} + \boldsymbol{F}_{1\perp} \tag{29}$$

列車の動きに関係あるのは線路に平行なベクトル $\boldsymbol{F}_{1\parallel}$ だけ. 列車が動かないためには,

$$\boldsymbol{F}_{1\parallel} + \boldsymbol{F}_{2\parallel} = \boldsymbol{0} \text{ つまり } \boldsymbol{F}_{1\parallel} = -\boldsymbol{F}_{2\parallel} \tag{30}$$

であればいい. 両辺の絶対値をとると,

$$|\boldsymbol{F}_1|\cos\theta = |\boldsymbol{F}_2|\cos(\pi - \phi). \tag{31}$$

この条件は内積を使うともっと簡単に書ける!

線路に平行な単位ベクトルを u とする．u と平行にしか動かないときのつりあいの条件は

$$\boxed{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots\boldsymbol{F}_n)\cdot\boldsymbol{u}=0} \tag{32}$$

$F_1\cos\theta$ を，F_1 の (例えば) 線路の向きの成分という．u を同じ向きの単位ベクトルとすると，線路の向きの成分は $F_1\cdot u$ で求められる．これは，力が u の向きにどれだけはたらいているかを表す量．すべての力の線路の向きの (u 向きの) 成分の和が 0 ならつりあっている．

上の力 2 個の場合にこの条件は，19 より，

$$\begin{aligned}0=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{u}=&\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{u}\\=&|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{u}|\cos\theta+|\boldsymbol{F}_2||\boldsymbol{u}|\cos\phi\\=&|\boldsymbol{F}_1|\cos\theta-|\boldsymbol{F}_2|\cos(\pi-\phi).\end{aligned} \tag{33}$$

たしかに同じ条件になっている．

例題 4

まっすぐな線路が, ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に平行に走っている.

1. 線路に平行な単位ベクトル u を求めよう.
2. 列車に力 $F_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が加わっている. 線路に平行な力 F_3 を加えて列車を動かないようにするには, F_3 はどのようなベクトルであればいいか考えよう.
3. 力の大きさ $|F_3|$ を求めよう.

20

2.4 力以外にも ‘何とか向きの成分’ は使える

例題 5

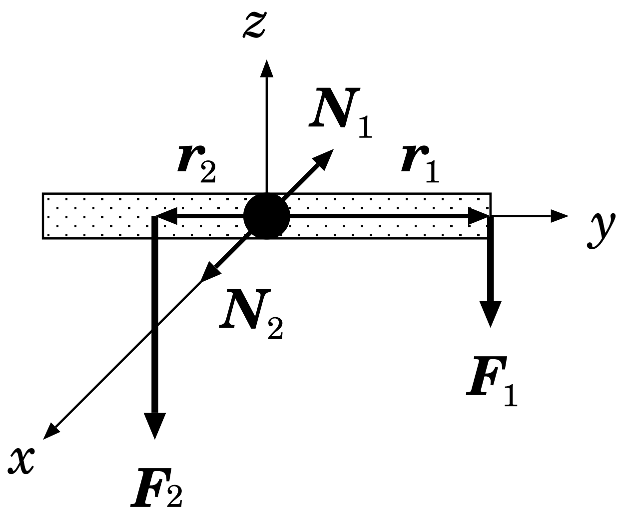
北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向き, 上が z 軸の正の向きであるような右手系をとる.

1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. これは, 北向きにはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. これは, 北西向きにはどれだけ進んだことになる?

21

2.5 やじろべえ

香中 p.5,7



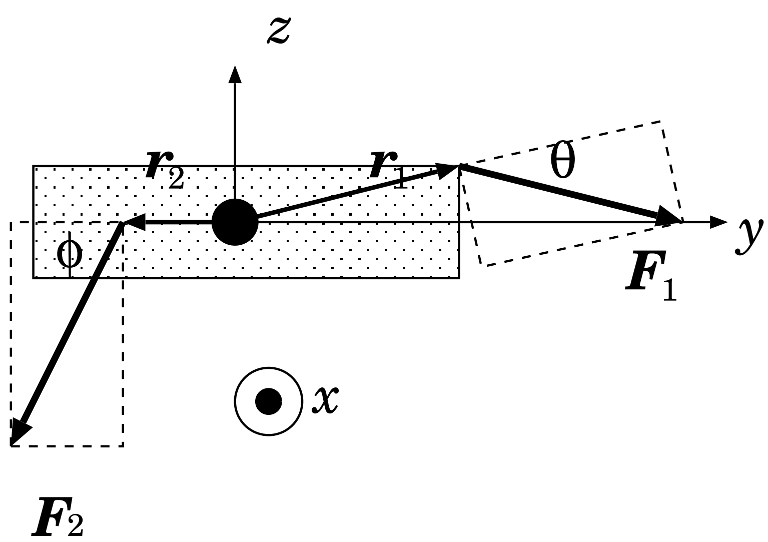
右の図のような原点で支えられたやじろべえが回転しない (つりあいの状態にある) 条件は,

$$|\boldsymbol{F}_1| : |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \qquad (34)$$

じゃあ, 斜めに引っ張る場合は?

F_1 を, r_1 に平行, 垂直に分解して得られるベクトルを $F_{1\parallel}$, $F_{1\perp}$ とする.

垂直なベクトル $F_{1\perp}$, $F_{2\perp}$ がやじろべえの動きに効く. つりあいの条件は



$$|\boldsymbol{F}_{1\perp}| : |\boldsymbol{F}_{2\perp}| = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \qquad (35)$$

つまり $|\boldsymbol{F}_1| \sin\theta : |\boldsymbol{F}_2| \sin\phi = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|$. (36)

実は，これはベクトルの外積を使うと便利に書ける． 香中 p.7

n **個の力がはたらいているとき，**

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1, \quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_n \tag{37}$$

とおく．これを，(原点のまわりの) 力のモーメント **という．単位はニュートンメートル** N · m.

つりあいの条件は，

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \cdots \boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{0}} \tag{38}$$

上の 2 **個の力の場合には，**

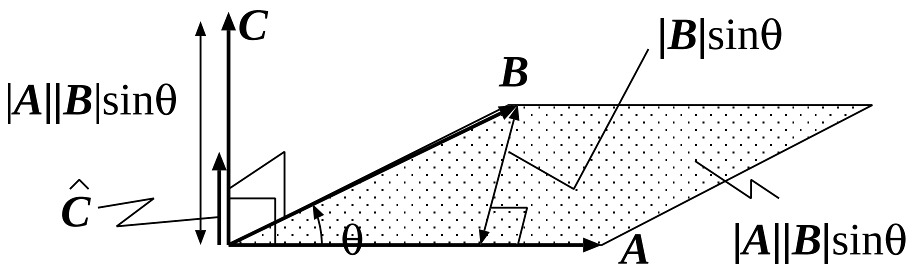
$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} =& \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\ =& |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|(\sin\theta)(-\boldsymbol{i}) + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|(\sin\phi)(+\boldsymbol{i}) \\ =& (-|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{F}_1|\sin\theta + |\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_2|\sin\phi)\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

よって, 同じ式

$$|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta : |\boldsymbol{F}_2|\sin\phi = |\boldsymbol{r}_2| : |\boldsymbol{r}_1|. \tag{39}$$

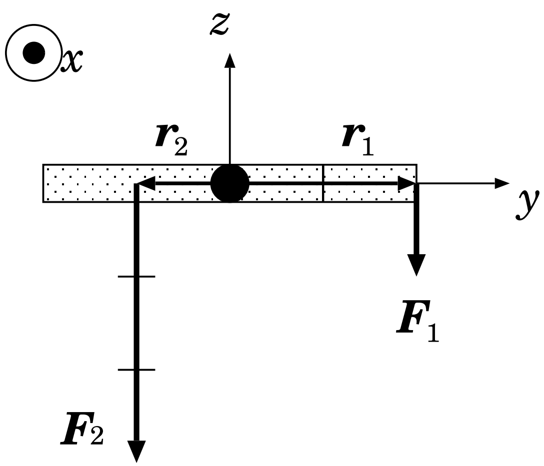
が得られた.

外積の定義を思いだそう:

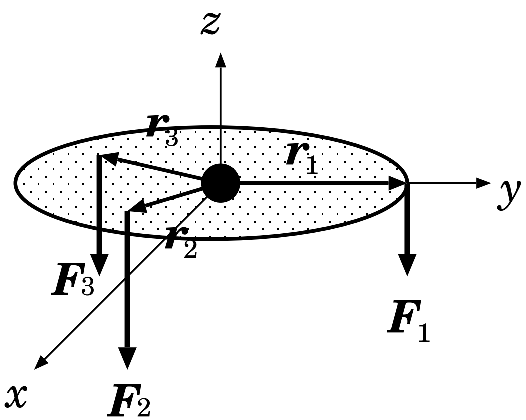


2.6 やじろべえの回転する向き

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\neq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{40}
$$



で, つりあっていないので回転する. でも, どっちに?



$\boxed{\text{回転の向き}}$ 立体的なやじろべえにも使える.

回転軸は N に平行.

回転の向き (図で, 時計回りまたは反時計回り) は, N 向きに進む $\boxed{22}$ の回る向き.

今日の quiz **は回収しません．下の空欄，または自分のノートにやってね．来週のプチトライアルはここから出題します．回答は今日中に** Web **に置きます．**

quiz 2

ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **とする．ベクトル** A **に平行で同じ向きの単位ベクトル** u **の成分表示を求めよう．ベクトル** B **の，ベクトル** A **の向きの成分を求めよう．**

quiz 3

原点を中心に回転するやじろべえを考える. $\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ を, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を加える. 右の図 (ベクトルは正確じゃないです) のように x 軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.