quiz 略解 10

$\boldsymbol{v}(t) = v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}$ とすると, 運動方程式は

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(t) = -12\cos(2t) \tag{116}$$

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(t) = -6\sin(2t) \tag{117}$$

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \tag{118}$$

両辺積分して,

$$v_1(t) = -2\sin 2t + D_1 \tag{119}$$

$$v_2(t) = \cos 2t + D_2 \tag{120}$$

$$v_3(t) = D_3 \tag{121}$$

初期条件より $D_1 = D_2 = 0, D_3 = 1.$

$$v_1(t) = -2\sin 2t \tag{122}$$

$$v_2(t) = +\cos 2t \tag{123}$$

$$v_3(t) = 1 \tag{124}$$

速さの 2 **乗が最大になる時刻を考える**.

$$|\boldsymbol{v}(t)|^2 = 4\sin^2 2t + \cos^2 2t + 1 = 4 - 3\cos^2 2t + 1 \tag{125}$$

最小になるのは, $t = \frac{n}{2}\pi$ (n **整数**) **で**, **最小値は**,
$|\boldsymbol{v}(\frac{n}{2}\pi)| = \sqrt{4-3+1} = \sqrt{2}$

8. いろいろな運動

力 $\boldsymbol{F}(t)$ のもとで運動する質量 m の物体が運動するとき, 時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は, ニュートンの運動方程式 (109) つまり

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{126}$$

から決まる. いろいろな $\boldsymbol{F}(t)$ のときに, $\boldsymbol{r}(t)$ がどうなるか見てみよう.

8.1 等速直線運動

力が働いていない, つまり, $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{0}$ の場合を考える. 運動方程式から

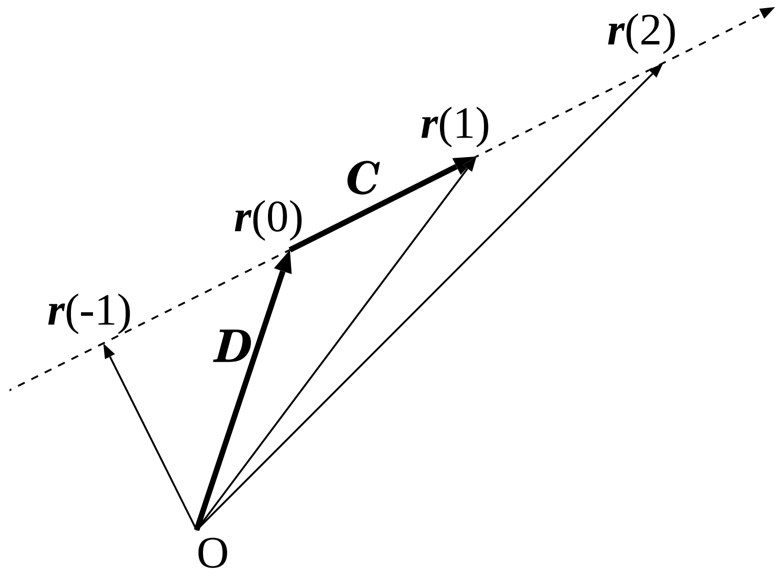
$$\left\{\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) &= 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) &= 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) &= C_1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) &= C_2 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) &= C_3 \end{aligned}\right. \quad \overset{\text{積分}}{\rightsquigarrow} \quad \left\{\begin{aligned} x(t) &= C_1t + D_1 \\ y(t) &= C_2t + D_2 \\ z(t) &= C_3t + D_3 \end{aligned}\right. \tag{127}$$

別の書き方では

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}, \rightsquigarrow \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{C}, \rightsquigarrow \boxed{68\quad\quad\quad\quad} \tag{128}$$

ただし, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$ は積分定数.

これは 等速直線運動 → アニメ i/V/EZ アプリ



8.2 等加速度運動 (=放物運動)

力の向き, 大きさが時間 t で変化しない (時間に依存しない ともいう),
つまり, $\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ が定数の場合を考える. 運動方程式から,

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) &= F_1 & & & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{F_1}{m}t + C_1 & & & x(t) &= \frac{F_1}{2m}t^2 + C_1 t + D_1 \\
m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) &= F_2 & &\rightsquigarrow & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{F_2}{m}t + C_2 & &\rightsquigarrow & y(t) &= \frac{F_2}{2m}t^2 + C_2 t + D_2 \\
m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) &= F_3 & & & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{F_3}{m}t + C_3 & & & z(t) &= \frac{F_3}{2m}t^2 + C_3 t + D_3
\end{aligned}
\tag{129}
$$

別の書き方では

$$
\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{1}{m}\boldsymbol{f}, \rightsquigarrow \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{m}\boldsymbol{f}\ t + \boldsymbol{C},
\tag{130}
$$

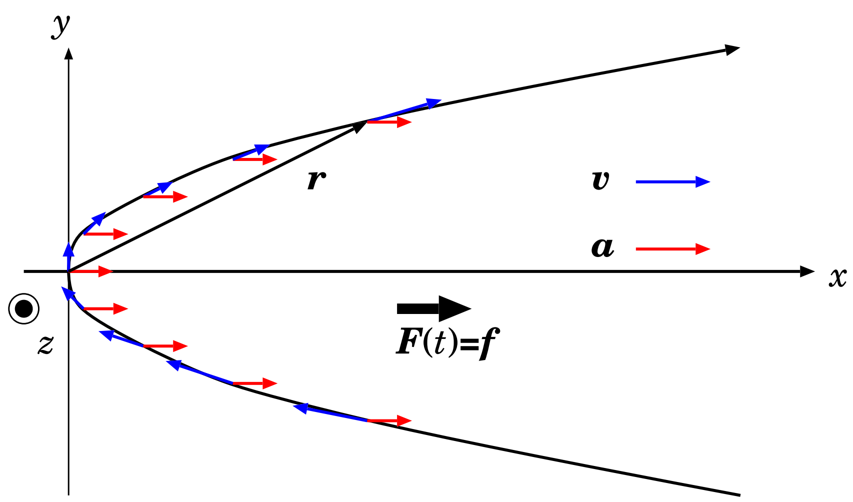
$\rightsquigarrow$ 69

これは $\boxed{\text{等加速度運動}}$ → アニメ i/V/EZ アプリ

簡単のために, f, C, D の各成分のうち, F_1, C_2 以外が零である場合を考える.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_1}{2m}t^2 \\
y(t) &= \qquad\qquad +C_2 t \\
z(t) &= 0
\end{aligned}
\tag{131}
$$

軌跡の式は, t を消去して, $z=0$, $\quad x = \frac{F_1}{2m}\left(\frac{y}{C_2}\right)^2$. つまり, xy 平面上の放物線.



8.3 加速度ベクトルの描き方

70

8.4 速さ一定の運動

速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が, $|\boldsymbol{v}(t)| =$ 一定 であるとする. (等速運動) つまり, カーブも速さ (=速度の大きさ) 変えずに曲がる危ない運転. 速度の向きは変ってもいい. だから, ふつう 71 ではない.

→ アニメ i/V/EZ アプリ

$$|\boldsymbol{v}(t)| = C \quad (\textbf{一定}) \Rightarrow \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = C^2 \tag{132}$$

次のページのやり方にしたがって両辺を t で微分して

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)) \tag{133}$$

72

速度ベクトルと加速度ベクトルは直交 (どっちかが零ベクトルかも)

8.5 内積, 外積, スカラー倍の微分

上では $v(t) \cdot v(t)$ を微分したが, 一般に, $\boxed{\text{ス}}$カラー値関数 $f(t)$ $\boxed{\text{ベ}}$クトル値関数 $A(t), B(t)$ に対して,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ベ}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\boldsymbol{A}(t)) \quad =\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{A}(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ベ}} \tag{134}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ス}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)) =\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ス}} \tag{135}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boxed{\text{ベ}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t))=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\times\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t)=\boxed{\text{ベ}} \tag{136}$$

つまり '普通のスカラー関数の場合の積の微分法' (左だけ微分プラス右だけ微分) みたいな式が成立する.

証明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\boldsymbol{A}(t)] = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_1(t)] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_2(t)] \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)A_3(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_1(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_2(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)A_3(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \end{pmatrix} + f(t)\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{A}(t) + f(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A_1(t)B_1(t) + A_2(t)B_2(t) + A_3(t)B_3(t)] \\ &= \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}(t)B_1(t) + A_1(t)\frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}t}(t) \\ &+ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}(t)B_2(t) + A_2(t)\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}(t) \\ &+ \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}(t)B_3(t) + A_3(t)\frac{\mathrm{d}B_3}{\mathrm{d}t}(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}(t). \end{aligned}$$

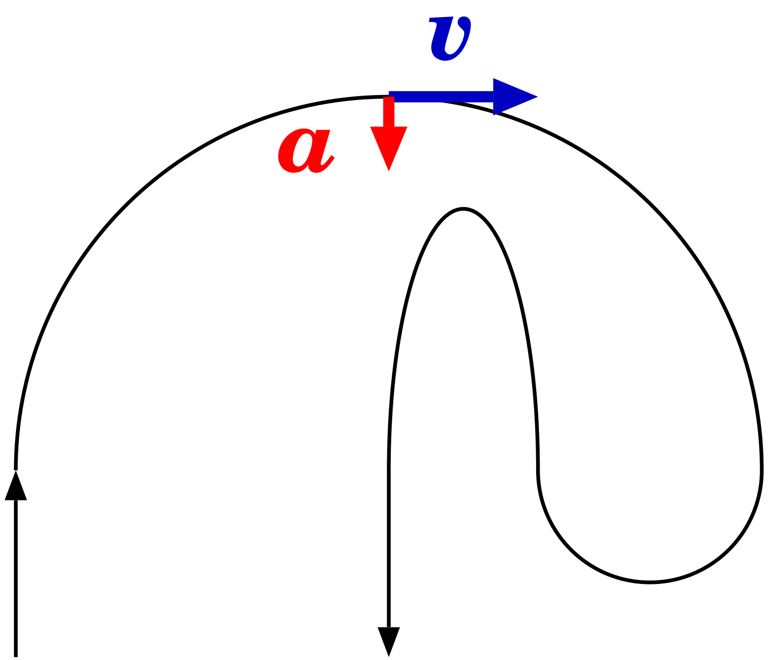
例題 16

運動の軌跡が原点を中心とする円周 (の一部) であるとき, 位置ベクトルと速度ベクトルはいつでも直交することを示そう.

73

quiz 11

曲線上を, 物体が, 矢印の向きで等速運動 (速さ一定の運動) している. 1 点について, 速度ベクトル v, 加速度ベクトル a が記してある. 他の点について, 速度ベクトル, 加速度ベクトルを書き加えよう. (零ベクトルになっている点では, ● をうってね)

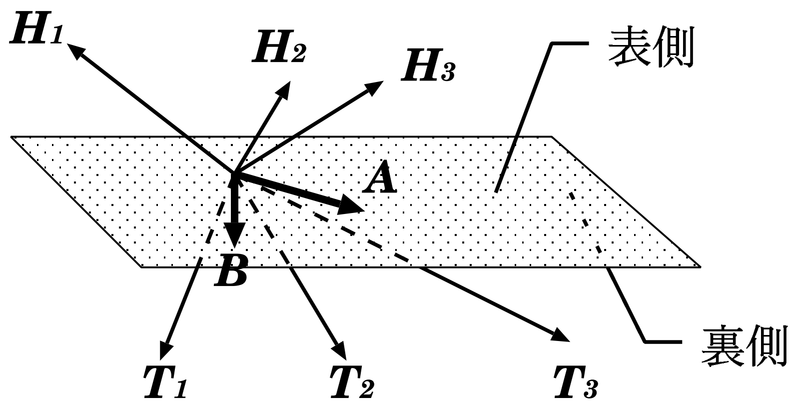


quiz 12

x, y, z 軸の正の向きの基本ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

ベクトル A, B の両方がのっている平面は 1 つだけある (図では薄く塗られている．それは xy 平面とは異なる)．下の図は，その平面を斜めから見たものである．

物体が平面の表裏どちら側にあるかについて，位置ベクトルが $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなものを表側，位置ベクトルが $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなものを裏側にあるということにする．



質量 $m = 1$ の物体が，力 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ のもとで運動している．また，この物体の運動は $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす．

1. 物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう．

2. **物体が平面上にある時刻を求めよう.**

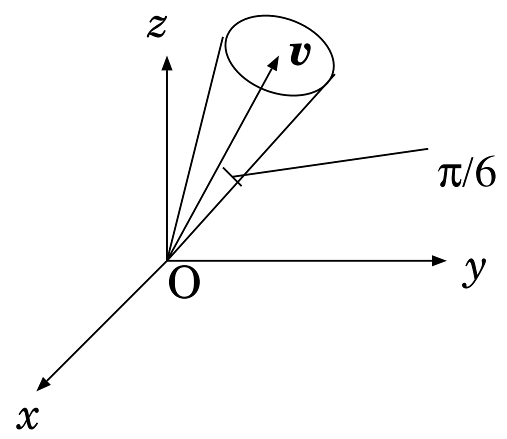
3. **物体の位置ベクトルが裏側にある時間の長さを求めよう.**

74

quiz 13

原点にスポットライトがあり, ベクトル $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 方向に, 広がりの角 $\frac{\pi}{6}$ で円錐状に広がる光を発している.

つまり, 光の当っている領域は, 原点を頂点とする, 無限に高い, 傾いた円錐であり, ベクトル $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ は円錐の中心軸に平行で, 頂点から底面に向かう向きである. (図の描き方は不正確です.) また, 円錐の軸と母線のなす角は $\pi/6$ である.



質量 $m = 1$ の物体が $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 6 \end{pmatrix}$ にしたがって運動している.

1. 物体の速度ベクトルと, 物体にはたらいている力を求めよう.
2. 物体の速度ベクトルと, 位置ベクトルとのなす角が $\frac{1}{4}\pi$ である時刻を求めよう.
3. 物体に光が当っている時間帯を求めよう.

すみませんスペース足りないでしょう.

75

アニメに対応する i/V/EZ アプリです.

hig3.net	i アプリ	V アプリ	EZ アプリ