

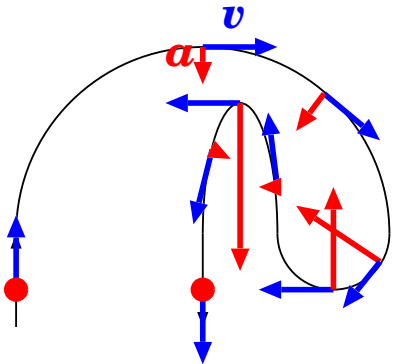
全体	目次	前回	次回	略解
----	----	----	----	----

更新 Time-stamp: "2004/07/14 Wed 18:08 hig"

quiz 略解 11

速度ベクトルの方向は軌跡の接線方向. 向きは進行方向. 速度ベクトルの大きさは一定 (あらかじめ描いてあるものにそろえる)

加速度ベクトルの向きは, 速度ベクトルの向きに直交し, 鋭角側 (円形なら内側) 向き. 加速度ベクトルの大きさは, 鋭く曲がっているところほど大きくなる. 特に, 直線の部分では 0.



quiz 略解 12

1. 運動方程式は,

$$1 \cdot \frac{dx}{dt}(t) = 0$$

$$1 \cdot \frac{dy}{dt}(t) = 0$$

$$1 \cdot \frac{dz}{dt}(t) = -2$$

積分して,

$$x(t) = C_1 t + D_1$$

$$y(t) = C_2 t + D_2$$

$$z(t) = -t^2 + C_3 t + D_2$$

初期条件より,

$$1. x(t) = -t$$

$$y(t) = -t$$

$$z(t) = 1 - t^2$$

2. $\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ のとき, $\mathbf{r}(t)$ は平面上にある. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -3t^2 + 2t + 3 \text{ より, } t = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

3. $\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) > 0$ のとき裏側にあるので, $\frac{1 + \sqrt{10}}{3} - \frac{1 - \sqrt{10}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.

quiz 略解 13

1. 速度ベクトル $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 力 $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $\frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{r}(t)}{|\mathbf{v}(t)| |\mathbf{r}(t)|} = \cos \frac{1}{4} \pi$ を解くと, $t = \pm 3\sqrt{2}$.

3. $\frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}(t)}{|\mathbf{w}| |\mathbf{r}(t)|} > \cos \frac{1}{6} \pi$ を解くと, $-\sqrt{\frac{10}{3}} < t < +\sqrt{\frac{10}{3}}$.

9. 重力と放物運動

9.1 物理量と単位系

和達表紙見返し

戸田表紙見返し

運動方程式 $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}(t) = \mathbf{F}(t)$. x 成分は $m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F_1(t)$. (137)

世の中の量には単位がある.

例	量	本家の単位	スペル	略記	邪道な単位
x	長さ	メートル	meter	[m]	尺, ヤード
m	質量	キログラム	kilogram	[kg]	オンス, ポンド
t	時間	秒	second	[s]	分, 年, 週
	電流	アンペア	ampere	[A]	
	角度	ラジアン	radian	[rad]	度

上の単位を基本として, 他の量の単位は, 上の単位の組み合わせで作る. これを MKSA 単位系という. [kg 重] は邪道です.

例	量	作り方	単位	略記
$\frac{dx}{dt}$	速度	長さ/時間	メートル毎秒	[m/s]
	体積	(長さ) ³	立方メートル	[m ³]
	密度	質量/体積		[kg/m ³]
$\frac{d^2x}{dt^2}$	加速度	速度/時間	メートル毎秒毎秒	[m/s ²]
F_1	力	質量 × 加速度		76

力 $F_1(t) = m \frac{d^2x}{dt^2}(t)$, 加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$.

1m/s² の加速度では, 速度が 1s に 1m/s 増加する.

1 kg·m/s² の力を受けると,

略記:

キログラムメートル毎秒毎秒 \rightsquigarrow ニュートン $[\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2] \rightsquigarrow [\text{N}]$

ニュートンメートル毎アンペア毎秒 \rightsquigarrow ボルト $[\text{N}\cdot\text{m}/(\text{A}\cdot\text{s})] \rightsquigarrow [\text{V}]$

等式, 不等式の両辺は必ず同じ単位になる.

キロ, ミリなどは, 単位の大きさを 10^n 倍変える接頭語.

倍率	接頭語	使用例	倍率	接頭語	使用例
10^9	ギガ G	ギガバイト,	10^{-1}	デシ d	デシリットル
10^6	メガ M	メガヘルツ	10^{-2}	センチ c	
10^3	キロ k		10^{-3}	ミリ m	
10^2	ヘクト h	ヘクタール = ヘクト アール	10^{-6}	マイクロ μ	
10^1	デカ da		10^{-9}	ナノ n	

例題 17

加速度の大きさ $36\text{km}/\text{分}^2$ は, m/s^2 でいうと?

78

quiz 14

1 円玉は直径約 2cm , 厚さ約 1mm , 質量 1g . 1 円玉の密度は何 kg/m^3 か計算しよう. 水の密度 $1000\text{kg}/\text{m}^3$ とどちらが大きいか考えよう.

9.2 地球上でよく使う座標系

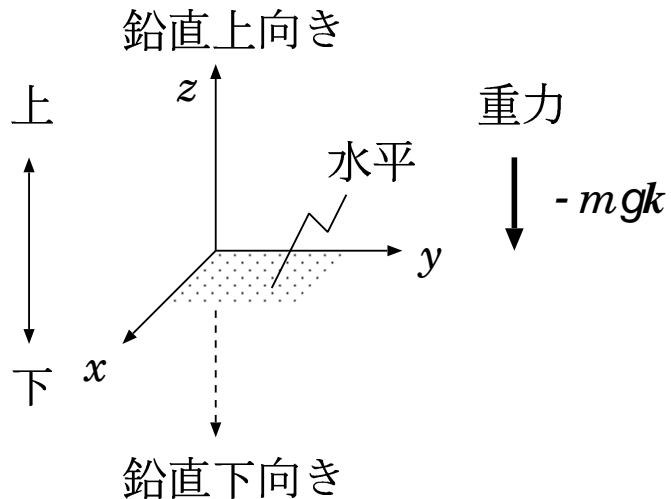
地球上には上下がある. 物の落ちる方向を下という.

xyz 座標軸は, 右手系で, z 軸の負の向きが下になるようにとり, x, y 軸はそれと直交するように (東西南北とは関係なく) 適当にとるのが普通.

z 軸方向

79

xy 軸方向 水平方向 (xy 平面は水平面)



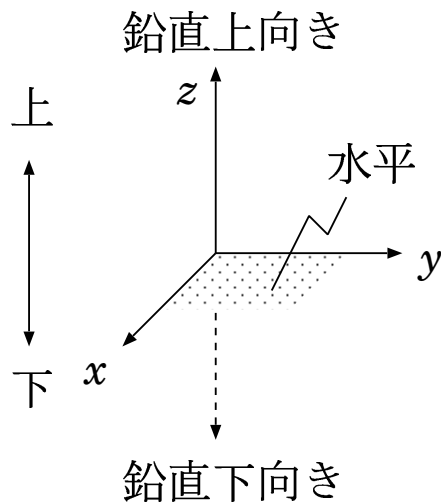
9.3 重力

香中 p.72

地球上の質量 m [kg] の物体には、重力という鉛直下向きの大きさ mg の力 80 がはたらく。

$g = 9.8[\text{m/s}^2]$: 重力加速度

つまり重力の大きさは $9.8m[\text{kg}\cdot\text{m/s}^2]=9.8m[\text{N}]$.



重力
↓ $-mg\mathbf{k}$

ちょっと紛らわしいけど、単位は立体フォント、変数は斜体フォントで書く習慣。手で書くときは気にしなくていい。

m は質量, m はメートル. g は重力加速度, g はグラム.

力の別の単位

$1[\text{kg 重}] = 9.8 [\text{N}] = (\text{質量 } 1\text{kg} \text{ の物体に地球上ではたらく重力の大きさ})$

9.4 放物運動

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 運動方程式は,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}(t) = -mg\mathbf{k} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = \boxed{81} \\ \frac{d^2 y}{dt^2}(t) = \boxed{82} \\ \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = \boxed{83} \end{cases} \quad (138)$$

$$\overset{\sim}{\int} \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = C_1, \\ \frac{dy}{dt}(t) = C_2, \\ \frac{dz}{dt}(t) = -gt + C_3. \end{cases} \quad \overset{\sim}{\int} \begin{cases} x(t) = C_1 t + D_1, \\ y(t) = C_2 t + D_2, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + D_3. \end{cases}$$

$C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$: 積分定数.

これは等加速度運動 (放物運動). ‘水平 (x, y) 方向だけみると等速直線運動, 鉛直 (z) 方向だけみると等加速度運動.’

次のような初期条件で考えよう.

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (139)$$

$$\mathbf{v}(0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \begin{pmatrix} V \cos \theta \\ 0 \\ V \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix} \quad (140)$$

($V > 0$).

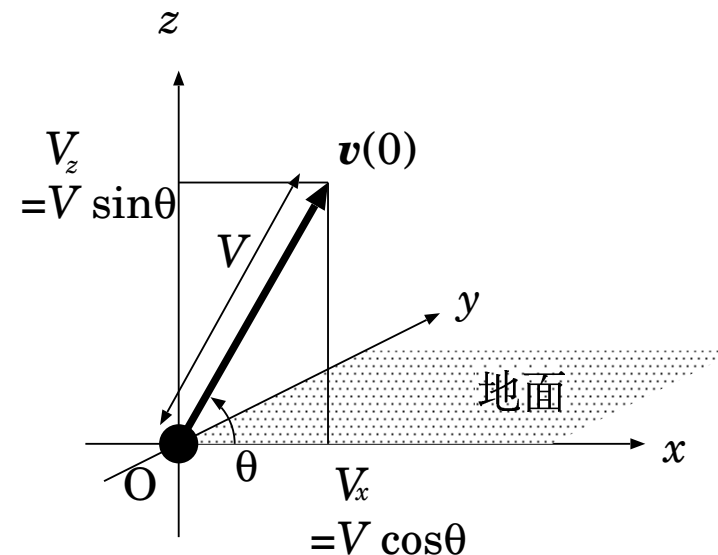
水平面 $z = 0$ を地面と思うと, この初期条件は次のような意味.

地面の点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から時刻 $t = 0$ に物を投げた.

初速度 $\mathbf{v}(0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0)$ の向きは, xz 平面内で,
の向きで, 大きさは V .

84

初期条件は, (V_x, V_y) の組, あるいは (V, θ) の組で指定できる.



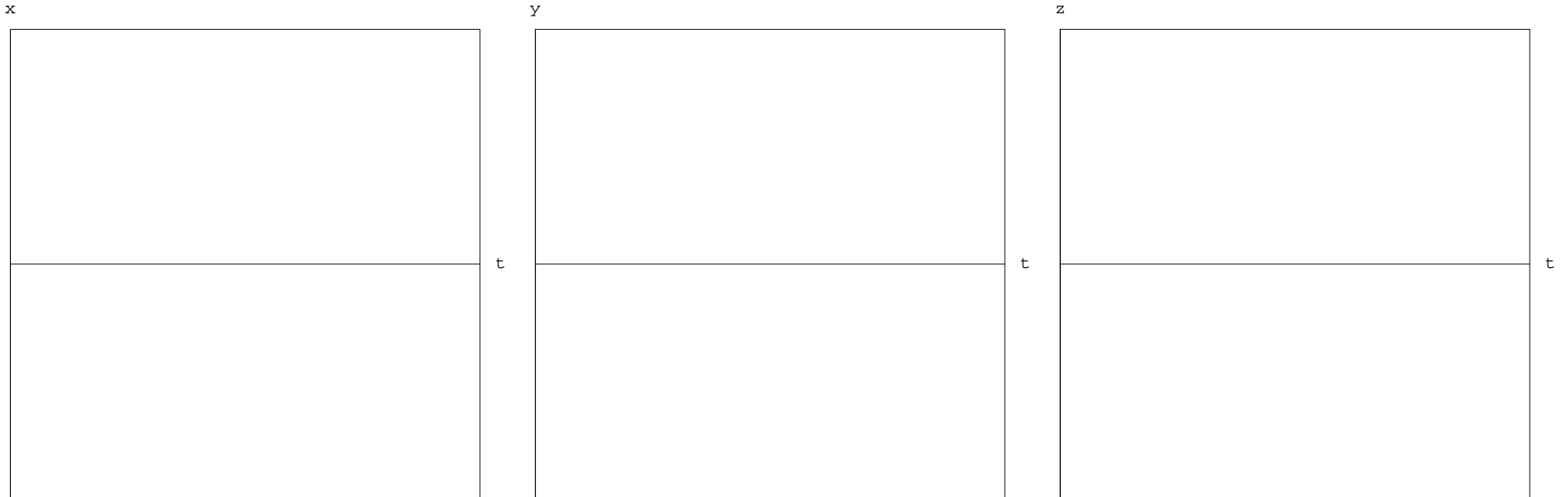
このときには,

$$x(t) = V_x t, \tag{141}$$

$$y(t) = 0, \tag{142}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_z t. \tag{143}$$

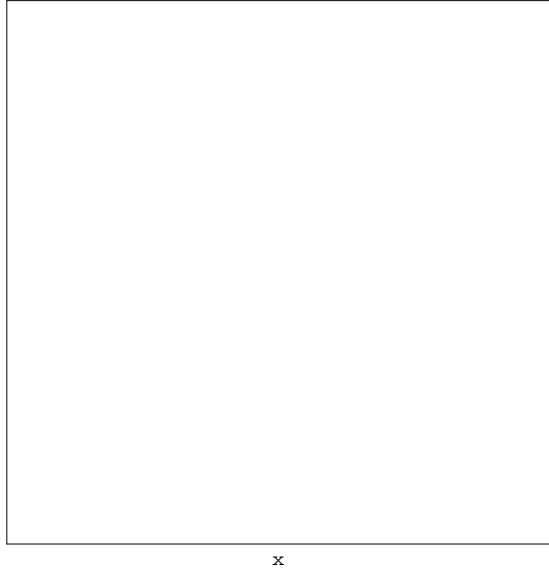
運動の様子 アニメ i/V/EZ アプリ



xz 平面での運動の軌跡を考えよう.

(141),(143) から t を消去しよう. (141) から $t = x/V_x$ なので,

$$\begin{aligned}
 z &= -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{V_x}\right)^2 + V_z \left(\frac{x}{V_x}\right) \\
 &= -\frac{g}{2V_x^2} \left[x^2 - 2\frac{V_x V_z}{g}x \right] \leftarrow \boxed{!} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{g}{V_x^2} \left[\left(x - \frac{V_x V_z}{g}\right)^2 - \left(\frac{V_x V_z}{g}\right)^2 \right] \quad (144) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{g}{V_x^2} (x - x_m)^2 + z_m
 \end{aligned}$$



これは 85 ! ただし, $x_m = \frac{V_x V_z}{g}$, $z_m = \frac{V_z^2}{2g}$ とおいた.

!を平方完成 $[x^2 - 2Ax] = [(x - A)^2 - A^2]$ (145)

9.5 ボールはゴールするか?

(141),(143) を使って考えよう.

でも, (141),(143) は覚えるのではなく, 導けるようにしてね.

例題 18

地面からのボールの高さが最大となる時刻を求めよう. そのときのボールの位置を求めよう.

例題 19

ボールが再び地面に落ちてくる時刻を求めよう. そのときのボールの位置を求めよう.

例題 20

$V = 20[\text{m/s}]$, $\theta = 30[\text{度}]$ とする. このボールは, $x = 20[\text{m}]$ にある高さ $10[\text{m}]$ の壁を越えるか?

quiz 15

$V = 20[\text{m/s}]$, $\theta = 60[\text{度}]$ とする. 位置 $x = 20[\text{m}]$ には高さ $2.44[\text{m}]$ のクロスバーがある. ボールはゴールするか (ノーバウンドで) 判定しよう. (地面とクロスバーの間を通過するとゴールです. 今はポストの外 (y 方向) に外れることは考えてません)

アニメに対応する $i/V/EZ$ アプリです.



hig3.net



i アプリ



V アプリ



EZ アプリ

お知らせ

07/28(水)1 講時ファイナルトライアル. 90 分. 科目の成績 100 点中 50 点です.

プチテストの返却

答案の返却方法は前回と異なります. 指定する次の時間帯のみに, 手渡しで返却を行います.

- 2004/07/02(金)13:10–14:00, 1 号館 5 階 1-539 号室.
- 2004/07/05(月)12:50–13:30, 1 号館 5 階 1-539 号室.

これ以降の返却は行いませんので注意してください.

なお, これとは別に, 全員に対してメールによる点数の通知を行います.