quiz 略解 16

1.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{1}{6}\pi t+\phi) \\ 2\sin(\frac{1}{6}\pi t+\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

初期条件より $\phi = \frac{1}{4}\pi$. ($+2n\pi$ **はあってもなくても可**)

2. $y(t) = -x(t)$ **より**, $\tan(\frac{1}{6}\pi t + \frac{1}{4}\pi) = -1$ **よって**,
$\frac{1}{6}\pi t + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi, \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$ (n **は整数**). **よって**,
$t = 3 + 12n, 9 + 12n$.

3. $\boldsymbol{r}(3+12n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}(9+12n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **で**, **通過する**.

4. 時刻 t における距離の 2 乗を考える.

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_2(t)|^2 =& (2\cos(\tfrac{1}{6}\pi t+\tfrac{1}{4}\pi)-\cos(2\pi t))^2 \\
&+(2\sin(\tfrac{1}{6}\pi t+\tfrac{1}{4}\pi)-\sin(2\pi t))^2 \\
=& (\text{加法定理}) = 5-4\cos(-\tfrac{11}{6}\pi t+\tfrac{1}{4}\pi).
\end{aligned}
$$

よって, 距離は $t=\frac{3}{22}+\frac{12}{11}n$ で最小値 $\sqrt{1}$ をとる.

quiz 略解 17

$\omega = 200\times 2\pi[\mathrm{rad}]/60[\mathrm{s}] = \frac{20\pi}{3}[\mathrm{rad/s}]$. $f = 200/60[\mathrm{s}] = 10/3$ [Hz] 速さ $= 0.06\mathrm{m}\times\omega[\mathrm{rad/s}] = 1.3[\mathrm{m/s}] = 4.5[\mathrm{km}/$時]. 32 倍速 CDROM の速さ $= 32\times 1.3[\mathrm{m/s}]\times\frac{3600[\mathrm{s}]}{1[\mathrm{h}]}\times\frac{1[\mathrm{km}]}{1000[\mathrm{m}]} = 150[\mathrm{km/h}]$

11. 座標変換と慣性力

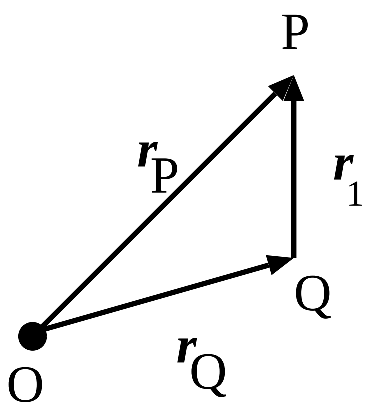
11.1 相対位置ベクトル (復習)

物体 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$ 物体 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$ とする.

物体 Q に対する 物体 P の 相対位置ベクトル とは, Q から P に向かう矢印で表わされるベクトル $\boldsymbol{r}_1$ である. いわば,

97

.



このとき,

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}.\text{つまり } \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}. \tag{162}$$

11.2 座標系の変更 (平行移動)

和達 p.49

新しい座標系 $x'y'z'$ を考えよう．座標系 $x'y'z'$ の原点 O′ は，物体 Q の位置．x', y', z' 軸は，x, y, z 軸を 98 したもの．

ちょっと変数名変更

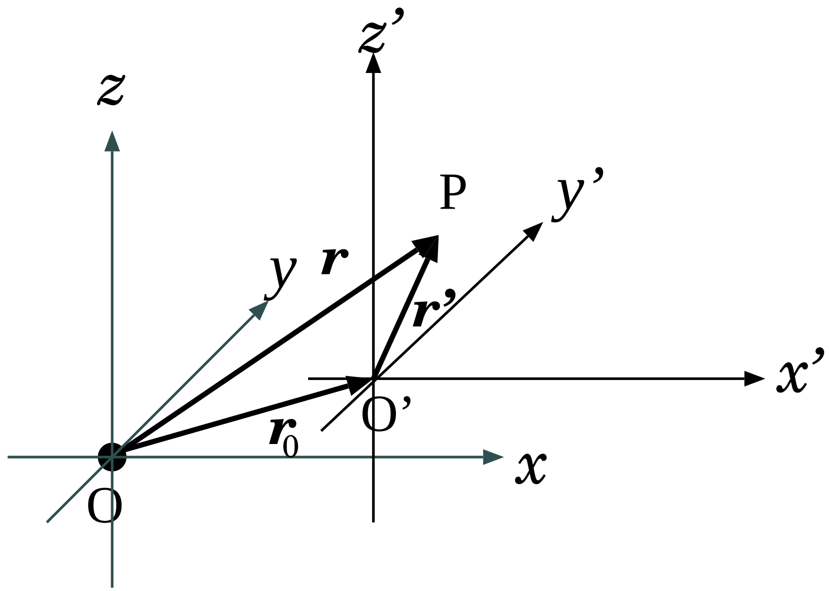
$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \longrightarrow \boldsymbol{r}$: 座標系 xyz でみた P.

$\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} \longrightarrow \boldsymbol{r}_0$: 座標系 xyz でみた Q=O′.

$\boldsymbol{r}_1 \longrightarrow \boldsymbol{r}'$: P の Q に対する相対位置ベクトル=座標系 $x'y'z'$ でみた P.

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0. \tag{163}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \tag{164}$$



注意 r',O$'$ の $'$ は微分ではなく, 新旧座標系を区別するためのものプライムまたはダッシュと発音.

座標変換

このように, 元の座標系での位置ベクトルから, 別の座標系での位置ベクトルを求めることを **座標変換** という. 上で見たのは, 平行移動による座標変換.

どの座標系で考えても (どのように座標変換しても), 運動の実体は同じはず. 問題に対しては同じ答が出せる.

でも, 見易い (計算しやすい) 座標系というのはあるので, 便利な座標系に座標変換するとよい.

放物運動のときに, 発射点を原点にしたり, 運動が xz 平面で起こる ($y(t) = 0$) としたのも, 座標変換の例.

座標系 $x'y'z'$ で測った速度, 加速度は?

P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が時間とともに変化するとする. O′ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$ は変化しないとする.

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 \tag{165}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) - \mathbf{0}. \tag{166}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0) = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) - \mathbf{0}. \tag{167}$$

元の座標系 xyz と, 新しい座標系 $x'y'z'$ では, 位置ベクトルは

99 . 速度ベクトル, 加速度ベクトルは 100 .

11.3 運動座標系と慣性力

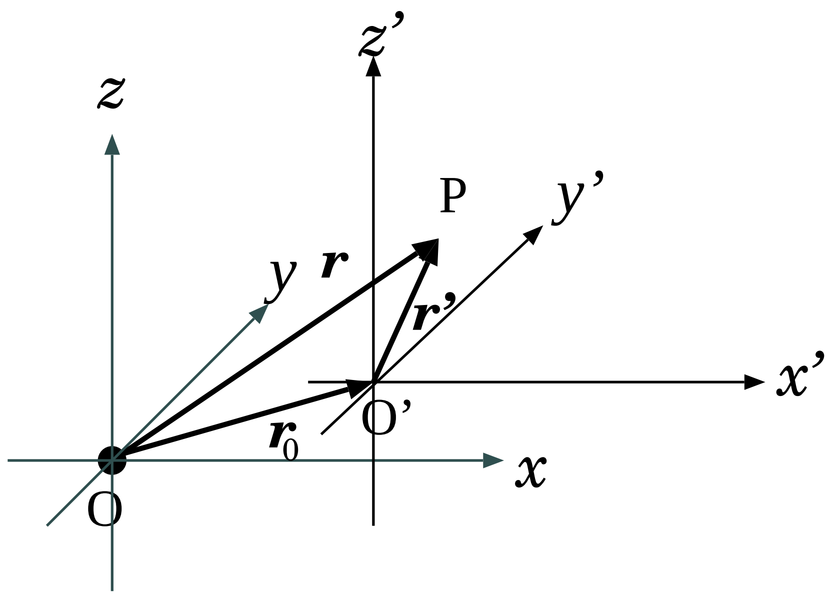
和達 p.106　戸田 p.180

新しい 座標系 $x'y'z'$ の原点 O$'$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0(t)$ も時間に依存するとしよう.

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0(t). \tag{168}$$

こういう, 時間とともに変化する座標系を 101 という.

走ってる車に '固定された' 座標系 $x'y'z'$ で, 鳥や, 他の車や, お手玉や, 揺れるコップの運動を見るようなもの.



- $\boldsymbol{r}'(t)$: 自分の車からみた相手の車
- $\boldsymbol{r}(t)$: 地面からみた相手の車
- $\boldsymbol{r}_0(t)$: 地面からみた自分の車

座標系 xyz は地面に固定された座標系.

質量 m **の物体** P **は**, **座標系** xyz **からみて**, **力** $\boldsymbol{F}(t)$ **を受けて運動しているとする**. **このとき**, **運動方程式**

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{169}$$

が成立.

座標系 $x'y'z'$ **からみた運動方程式**, **つまり** $\boldsymbol{r}'(t)$ **の満たす運動方程式は**?

$\boldsymbol{r}(t)$ **に対する運動方程式から導けばよい**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0(t)\right) = \boldsymbol{F}(t) + \boxed{-m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t)} \tag{170}$$

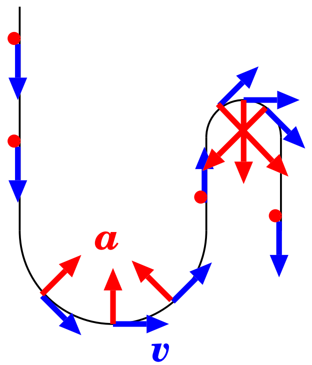
ニュートンの運動方程式に, **座標系の原点** O′ **の加速度の** 102 **というよけいな項がついてしまう**!

座標系によってはニュートンの運動方程式は成立しない?

姑息な解決策

座標系 $x'y'z'$ でも運動方程式が成り立つと思いたいので, 座標系 $x'y'z'$ に限っては,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \underbrace{\boldsymbol{F}(t)}_{\text{普通の力}} + \underbrace{\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t)}_{\text{慣性力}} \qquad (171)$$



$$\textbf{慣性力}\ \boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = -m\boldsymbol{a}_0(t) \qquad (172)$$

のように, $\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t)$ という別の力が追加で働いていると考えることにする.

ここで, m は 103 **の質量, $\boldsymbol{a}_0(t)$ は** 104 **の加速度. これを** 105 **という. $\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{a}$ じゃない!**

加速度運動する運動座標系からみた運動方程式には慣性力が現れる.

慣性力なしの運動方程式が成立する座標系 $=$ **慣性系**

地面に固定された座標系は慣性系 (本当?).

11.4 いろんな場合の慣性力

O′ の位置が一定の場合

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \boldsymbol{C}. \quad (\text{定数}) \tag{173}$$

最初の場合と同じ. $\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}$ **より慣性力は働かない.**

例 **原点は (時間によらないなら) どこにとってもよい. 世界に中心はない.**

O′ が等速直線運動する場合

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \boldsymbol{B}t + \boldsymbol{C}. \quad (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\ \text{定数}) \tag{174}$$

このときの座標変換

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{B}t - \boldsymbol{C} \tag{175}$$

を ガリレイ変換 という.

このとき, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}(t) = -m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0}$ **より慣性力は働かない.**

例 **列車が静かに一定速度で走っていると, 止まっているのと区別がつかない. そういう列車のなかでボールを投げても, 地上で投げるのと同じ運動をする.**

ガリレイの相対性原理

互いに等速直線運動する座標系では,

106 **(物理法則は同じ形になる).**

特に, 慣性系に対して等速直線運動する座標系は, また慣性系.

だから, 一定速度で走る列車の上では, 列車に固定された座標系で考えてもよい.

O′ が等加速度運動する場合

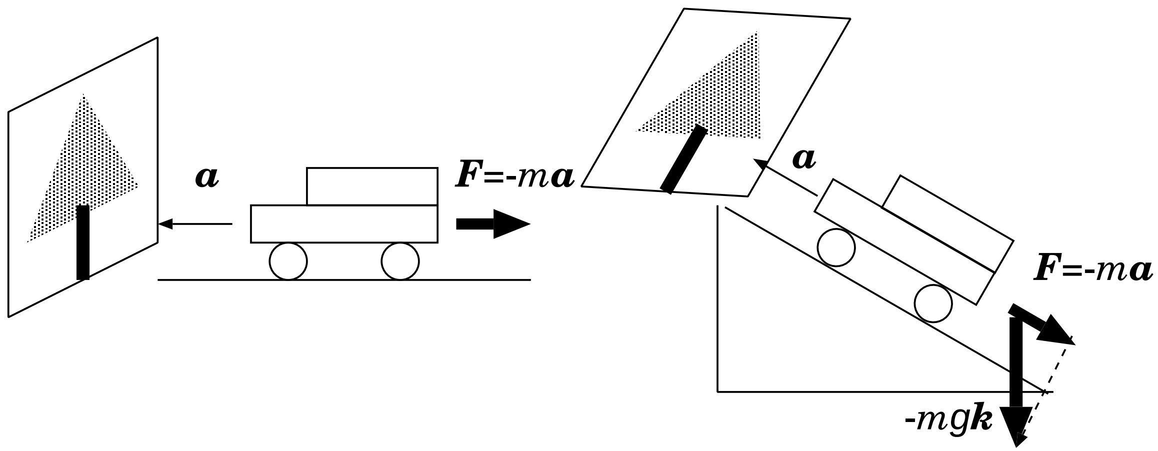
$$\boldsymbol{r}_0(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}t^2 + \boldsymbol{B}t + \boldsymbol{C}. \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\ \text{定数}) \tag{176}$$

このとき, $\boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t) = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) = -m\boldsymbol{A}.$

一定の慣性力 $-m\boldsymbol{A}$ がはたらく.

例　前後に加速, 減速する車の中で感じる力. エレベータが動き出すとき, 止まるときに感じる力.

バック・トゥ・ザ・フューチャー・ザ・ライド



応用: 落下中の物体に固定された座標系

バンジージャンプ中に手から離れたカメラがどうなるか考えよう.

地面に固定された座標系 xyz (z 軸の正の向きが鉛直上向き) でみた, バンジージャンプで落下中の質量 M の人の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0(t)$ とする.

落下中の人に固定された座標系を $x'y'z'$ とする.

落下中の人が持ってる質量 m のカメラの, 座標系 xyz, 座標系 $x'y'z'$ での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t)$ とする.

人の運動方程式

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}^2t}(t) = -Mg\boldsymbol{k}. \tag{177}$$

つまり, 加速度は $-g\boldsymbol{k}$.

座標系 $x'y'z'$ でのカメラの位置ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ の従う運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \underbrace{-mg\boldsymbol{k}}_{\text{重力}} + \underbrace{(-m)(-g\boldsymbol{k})}_{\text{慣性力}} \overset{\boxed{!}}{=} \boldsymbol{0}. \tag{178}$$

つまり, 落下中の人から見ると, 重力と慣性力と

が 107 , カメラは力を受けずに (無重力状態で) 運動している!

実はスペースシャトルの中の無重力状態もこういうこと.

ジェット機で体験する無重力状態. ロシアで 88 万円.

例題 22

重力加速度の大きさを $g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$ **とする**.

体重計とは, **その上に載った物の受ける力が**, **鉛直上向きに測って** F $[\mathrm{kg{\cdot}m/s^2}]$ **であるときに**, $-F/g$ $[\mathrm{kg}]$ **と表示するような機械である**.

質量 $M = 1000$ $[\mathrm{kg}]$ **のエレベータ内で**, **質量** $m = 50$ $[\mathrm{kg}]$ **の人が体重計にのっていた**.

エレベータが加速度 $\pm 4.9[\mathrm{kg \cdot m/s^2}]$ **で上昇中**, **下降中のとき**, **および**, **ロープが切れて落下中のとき**, **体重計はどのような値を指すか考えよう**.

108

O′ の加速度が変化する場合

quiz 18

x 軸の正の向きに前進する (バック中ではない) 車の運動を考える．時刻 t における車の (慣性系からみた) 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0(t)$ としたとき，速度ベクトルが $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ だとする．

加減速の際に，ドライバーがシートに押し付けられたり，シートから浮き上がったりするのは慣性力によるものである．ドライバーの質量を m とするとき，ドライバーがシートに最も強く押し付けられる時刻とそのときの慣性力を求めよう．

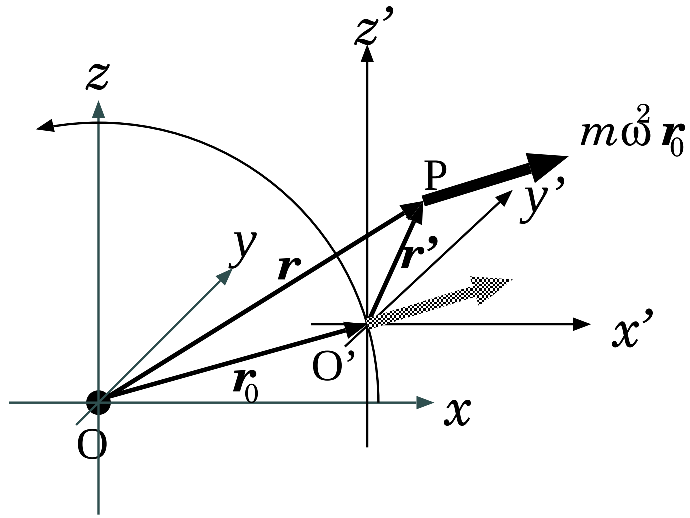
109

O′ が等速円運動する場合

11.5 等速円運動と遠心力

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (179)$$

このとき,



$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t) &= -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2}(t) \\ &= -m(-\omega^2)\boldsymbol{r}_0(t) = m\omega^2\boldsymbol{r}_0(t) \end{aligned} \qquad (180)$$

(前回求めた加速度)

回転の中心と O′ を結ぶ方向に平行で, 中心と逆向き= $\boxed{\text{遠心力}}$

$\boxed{\text{例}}$ **レコードのターンテーブルにのってる人形. メリーゴーラウンドに**

のってる子供.

$x'y'z'$ **座標系が回転もすると, コリオリ力が現れる.**

北半球で台風が左巻きなのはコリオリの力のせい. 1999 **年** 18 **号. アニメ**

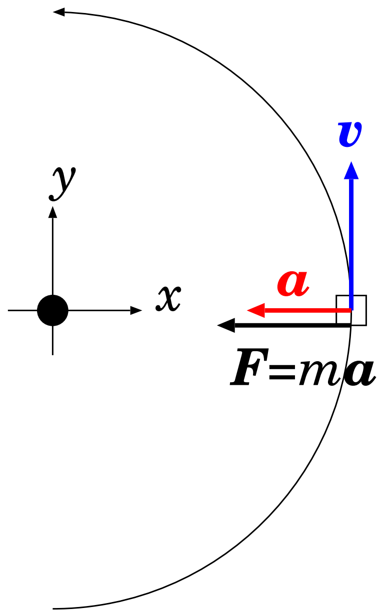
運動方程式を 2 つの立場で立てる

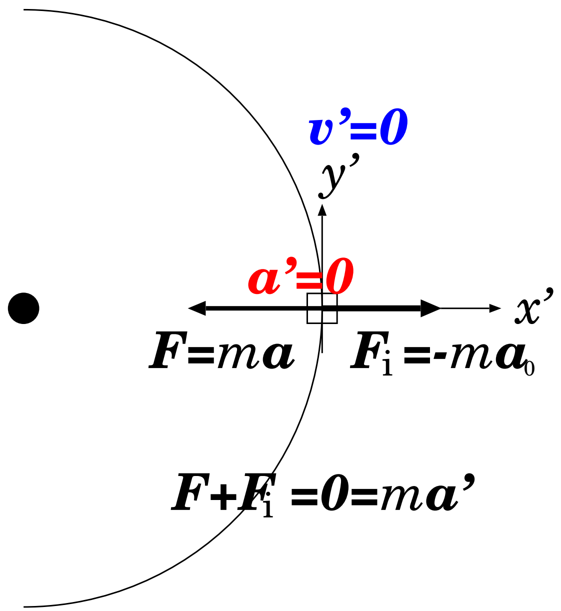
xyz **系 (慣性系)**

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{181}$$

$x'y'z'$ **系 (非慣性系)**

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{F}(t) + \boldsymbol{F}_\mathrm{i}(t) \tag{182}$$





例題 23

鉛筆に 20 [g] **のビー玉を長さ** 9[cm] **の糸で結び,** 3 **秒に** 1 **回の割合で振り回して等速円運動させた. 糸がビー玉を引く力の大きさは**?

110

quiz 19

LP レコードは, 直径 30 [cm] で, 33.3rpm(revolutions per minute) と言われるように, 毎分 100/3 回転する. LP レコードの端に, 質量 81 [g] のぬいぐるみを置いたまま回した. このぬいぐるみは, 静止しているときに 0.1N 以上の力を受けると倒れてしまうという. ぬいぐるみは遠心力で倒れるか考えよう. ただし $\pi^2 = 9.9$.

111

ファイナルトライアル

07/28(月) 1 講時 90 分, 科目の成績 100 点中 50 点分です. 試験範囲は, 授業の範囲でいうとすべてです. 具体的には次の 5(大) 問を出題します.

- 内積, 外積, スカラー倍, 右手系, 左手系などベクトルの計算
- 位置, 速度, 加速度, 力, 初期条件のうちのいくつかからいくつかを求める.
- 運動が分かったときに, 物体が壁を越すか, ゴールするか, 距離, 速度, 加速度がこうなるのはいつかなど.
- 単振動, 等速円運動
- 慣性力, 遠心力

答案は返却しません. 点数は, アドレス `t040nnna@ryukoku-u.jp` へのメールで, すべての人に個別に連絡します. 夏のプチテストまでの点数は, 上のアドレスにすでに送ってあるメールを参照してください.

情報処理技術者試験

http://www.jitec.jp

秋期試験の申込締切 8/23, **試験** 10/17

数理の学生は, 1 **年か** 2 **年で初級シスアド** (**情報処理システム** I), 2 **年か** 3 **年で基本情報技術者** (2 **年の情報系科目**) 4 **年でソフトウェア開発技術者をとりましょう**.

quiz 20

先々週と同じ放物運動

$$x(t) = V_x t, \tag{183}$$

$$y(t) = 0, \tag{184}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_z t. \tag{185}$$

がすでに求められているものとして考える.

時刻 $t = 0$ における初速を $V_x = 5[\mathrm{m/s}]$, $V_z = 15\ [\mathrm{m/s}]$ とする. 位置 $x = 10[\mathrm{m}]$ から位置 $x = 15[\mathrm{m}]$ にかけて置かれている, 長さ $5\ [\mathrm{m}]$ 高さ $5\ [\mathrm{m}]$ の台の上の面にボールがあたるかどうか考えよう.

112

全体 | 目次 | 前回 | 次回 | 略解