物理数学 II

樋口さぶろお[a]

- 講義の Web page

  `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/`
- この紙は, 上の Web page や 1-508 前の引き出しで事前に配っていることもあります.
- 成績は 100 点=平常点 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50. プチテストの日程は追って連絡します.
- 毎回, 理解を確かめる quiz をします. 配った紙に解いて提出してください. フォルダーを学籍番号でグループ分けしています.
- 紙は, チェックした後, 1-508 前の引き出しで返却します. ただし, 数週間以上経過したものは処分することがあります.

---

[a] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

- $\boxed{\text{佐本 n.m}}$, $\boxed{\text{佐本 p99}}$ などは, 参考文献 (佐川-本間 力学) の参照個所を示します.
- 教育補助員 宮野仁代さん (松木平研 M2)
- チューター 前直弘さん (飯田研 D,1-615), 郷原徳照さん (松木平研 M1,1-539) 他.
- 再履修の方へ: 2001 年度以前の内容と同じではありません (重なる部分は多いですが)

1 ニュートンの運動の 3 法則

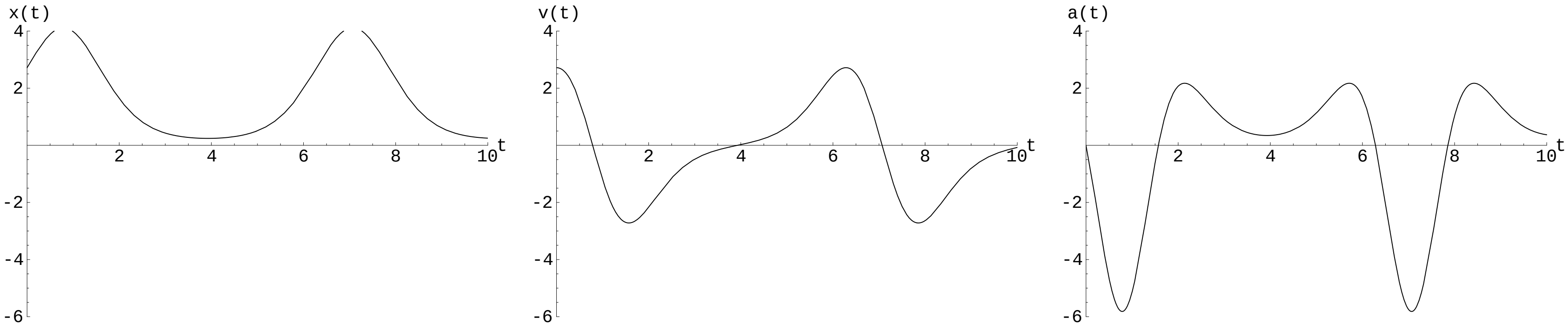
‘物体の運動の様子 $\vec{r}(t)$ は, 物体に加わる力 $\vec{F}(t)$ によってきまる.’

その関係がニュートンの運動方程式.

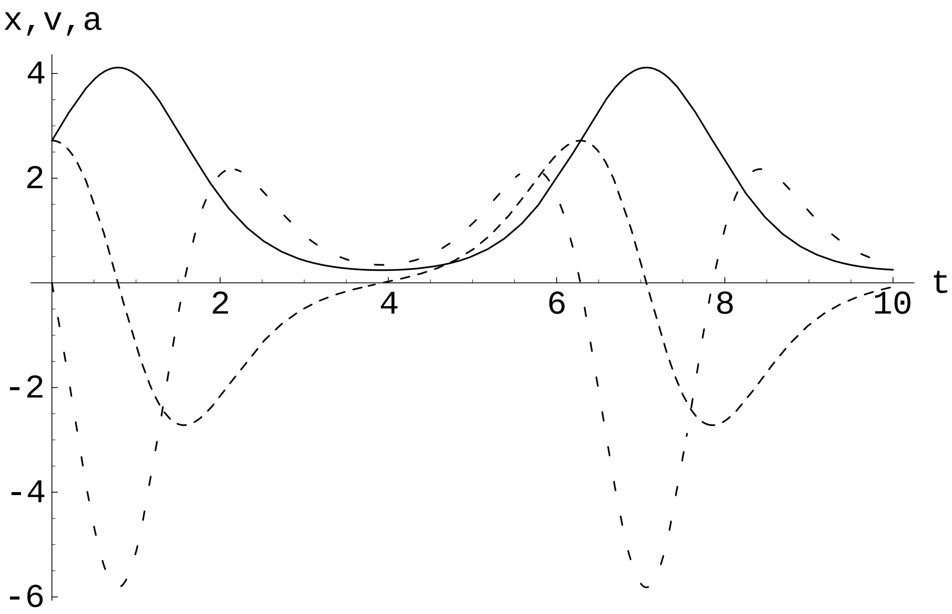
1.1 物理数学 I の復習

t: **時刻** , $\vec{r}(t)$: 3 **次元ベクトル**

$$\boxed{\textbf{位置}\ \vec{r}(t)} \ \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\text{微分}}}\ \underset{}{}\text{積分}\ \boxed{\textbf{速度}\ \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t)} \ \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\text{微分}}}\ \text{積分}\ \boxed{\textbf{加速度}\ \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t)}$$



重ねてみると,



時刻: $t \cdots$ **車の時計.**

位置: $x \cdots$ **車の** $\boxed{1}$.

速度: $v_x \cdots$ **車の** $\boxed{2}$

加速度: $a_x \cdots$ $\boxed{3}$

ない車は'アクセルの踏み具合'(バックのときは負)

例題 1 時間を t とするとき，ある粒子の速度ベクトルの x 成分は $v(t) = \mathrm{e}^{-4t}$ である．加速度ベクトルの x 成分 $a(t)$ と，位置ベクトルの x 成分 $x(t)$ とを求めよ．ただし，$x(0) = 1$.

4

1.2 第二法則 (ニュートンの運動方程式)

佐本 3.4

物体の加速度は, 物体の受ける力で決まる.

加速度の向き: 力 $\vec{F}$ **の向きに平行.**

加速度の大きさ: 質量 m **に反比例, 力 $\vec{F}$ の大きさに比例.**

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} \text{ すなわち } \boxed{5 \qquad\qquad} \tag{6}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ **を x, y, z 方向の単位ベクトルとして成分で書く.**

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x(t), \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y(t), \quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z(t). \tag{7}$$

力から加速度, 加速度から速度, 位置が (積分で) 計算できる.

質量とは

質量の単位: $\boxed{\text{kg (キログラム)}}$. **質量はスカラー**

水 1 リットルの質量は 1kg. 1 **円玉の質量は** 1g=0.001 kg.

(慣性) 質量: $\boxed{6 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

重さ: $\boxed{7 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

$\boxed{\text{(慣性) 質量} \neq \text{重さ}}$

力とは

力の単位 $\boxed{\text{N(ニュートン)}}$. **力はベクトルで重ねあわせができる**.

1kg **の物体にはたらくと**, $1\mathrm{m/s^2}$ **の加速度を与える力の大きさを** 1N **という**. $1\mathrm{N}=1\ \mathrm{kg\ m/s^2}$.

地表で 1kg **の物体にはたらく重力**: $1\ \mathrm{kg} \times 9.8\mathrm{m/s^2} = 9.8\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}$ **重**.

1.3 第一法則 (慣性の法則)

佐本 3.2

第二法則で, $\vec{F} = \vec{0}$ のとき,

$$m \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{0} \left(= \vec{F} \right) . \tag{8}$$

物体は, ‘力’ の作用を受けないかぎり, 等速直線運動をする. (特に, 速度 $\vec{0}$ すなわち静止の場合もある)

例: エアホッケーのパック, 電車の中の風船, 無重力状態の宇宙飛行士, 宇宙船.

例でないもの: 地面を転がるボール, 自転車, 自動車.

観測者は地面に固定されているとは限らない.

等速直線運動する電車, 飛行機, エレベータの中でもよい. 慣性系

8 の中では成り立たない.

当面, このような状況は考えない. '慣性系' のみを考える.

例題 2 **板のうえで, ひもで結んだ重りを振り回す. ひもが切れると, 重りはどのような運動をするか.**

1.4 第三法則 (作用・反作用の法則)

佐本 3.5

年末ごろやります.

2 運動方程式

しばらく, 運動が x 方向に限られた場合を考えよう. つまり,

$$\vec{r}(t) = (x(t), 0, 0), \quad \vec{v}(t) = (v(t), 0, 0), \quad \vec{a}(t) = (a(t), 0, 0), \quad \vec{F} = (F, 0, 0)$$

の $x(t), v(t), a(t), F$ だけを考えよう.

2.1 運動方程式を ‘解く’

力 F が与えられたときに, 運動方程式を解いて $x(t)$ を求めるのが, 力学の典型的な問題.

例題 3 時間を t とする．質量 m の物体が，力 $F = \mathrm{e}^{-t}$ を受けて運動している．時刻 $t = 0$ で $x = 0$ に静止していた物体の運動を求めよ．

言葉の使い方:

運動を求めよ $\Leftrightarrow$ 時刻 t での位置 $x(t)$ を求めよ．

静止していた $\Leftrightarrow$ 速度が 0 だった $\Leftrightarrow$ $v(0) = 0$.

9

10

$$x(t) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{m}t - \frac{1}{m}. \tag{16}$$

これで運動方程式が '解けた' ($x(t)$ が求まった).

検算 (必ずやろう)

$$x(t) = \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{m}t - \frac{1}{m}. \qquad x(0) = 0. \tag{17}$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{m}. \qquad v(0) = 0. \tag{18}$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = +\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-t}. \tag{19}$$

運動方程式を解くために積分 (2 回!) すると, 積分定数 (2 個) が出てくる. これを決定するのに, 初期条件 (2 個. 今なら $x(0), v(0)$) を使う.

2.2 きょうの quiz

1. 物理数学 I, 物理学序論の感想, 物理数学 II への希望, きょうの授業に対する感想 (早すぎた, 遅すぎた, まだ習っていないことを習っているかのように扱っている, 他の授業と記号が違う, プロジェクター/黒板が見にくい, など) を何でも書いてください.
2. 時間を t とする. 質量 $m = 1$ の物体が, 力 $F = -\cos t$ を受けて運動している. 時刻 $t = 0$ で $x = 1$ に静止していた物体の運動を求めよ.
3. 時間を t とするとき, ある粒子の速度ベクトルの x 成分は $v(t) = -\sin(4t)$ である. 加速度ベクトルの x 成分 $a(t)$ と, 位置ベクトルの x 成分 $x(t)$ とを求めよ. ただし, $x(0) = 1$.

2.3 先週の quiz

1. 全部には返事できなくてすみません.
   - すべてのテストはすべて持込不可です．去年の問題は Web に置いてあります．テストの問題は, 暗記だけでは答えられないことを最重要視して作っています.
   - 黒板はなるべく照明をつけます.
2. $x(t) = \cos(t)$.
3. $a(t) = -4\cos(4t), x(t) = \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{3}{4}$.

3 3次元の運動方程式と運動

佐本 2.3

時刻 t **での位置** $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. **力** $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, **質量** m.
ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \quad \text{成分で書くと} \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z. \end{cases} \tag{20}$$

3.1 力の働かないときの 3 次元の運動 (第 1 法則)

$$
\text{力が働かない} \Leftrightarrow \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0,0,0) \rightsquigarrow \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{21}
$$

$x(t)$ は, 先週の方法で求められる.

11

y, z 成分も同様.

$$\begin{cases} x(t) = v_{x0} \times t + x_0, \\ y(t) = v_{y0} \times t + y_0, \\ z(t) = v_{z0} \times t + z_0, \end{cases} \quad \text{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

または

$$\boxed{12 \qquad\qquad\qquad} \tag{25}$$

等速直線運動! ⋯ 第 1 法則の結論

$v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$ は積分定数.

$\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ は $\boxed{13 \qquad\qquad\qquad}$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ は $\boxed{14 \qquad\qquad\qquad}$

3.2 別の運動

例題 4 質量 $m = 1$ の物体が，3 次元空間を運動している．時刻 t の位置を，$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とかく．物体は，力 $\vec{F} = (-\cos t, -\sin t, 1/100)$ を受けている．時刻 $t = 0$ には，$\vec{r}(0) = (1, 0, 0), \vec{v}(0) = (0, 1, 0)$ だったとする．物体の運動を求めよ．

15

16

3.3 放物運動

佐本 2.2,2.4

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 地表の高さを $z = 0$ とする.

地表近くの, 質量 m の物体には,
大きさ mg, 鉛直下向きの 重力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg)$ が働く.

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$: 重力加速度.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = \boxed{17 \qquad\qquad} . \end{cases} \tag{26}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 階 $\times$ 3 次元 $=$ 6 個.

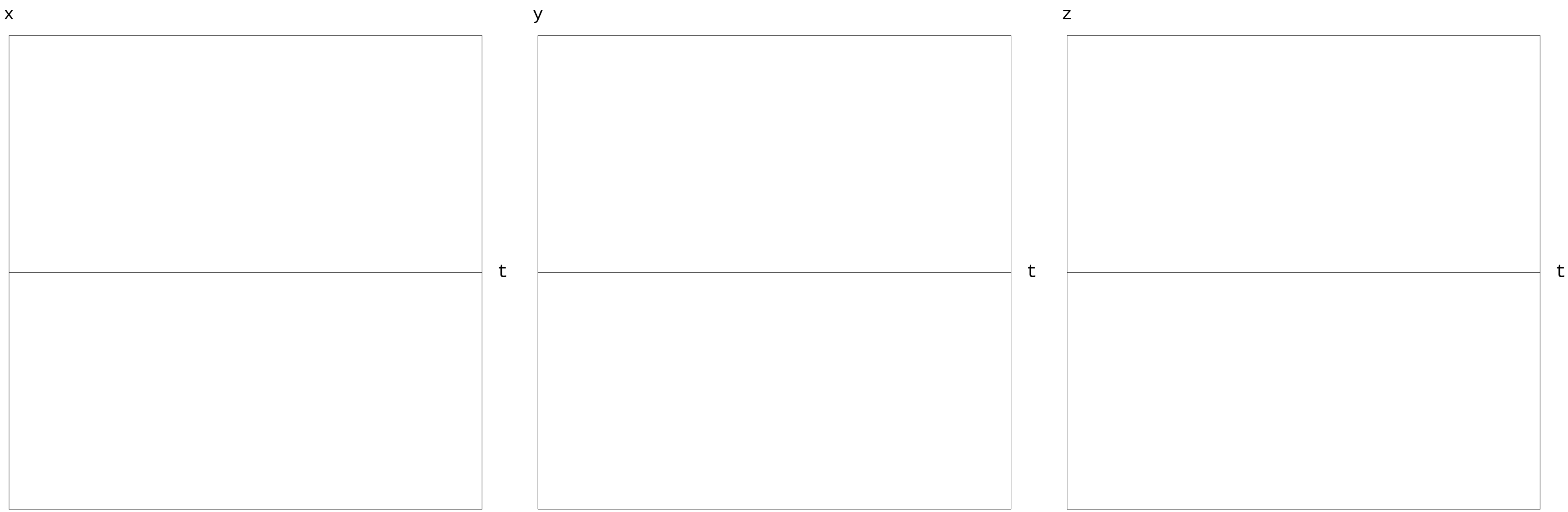
簡単のために, $x_0 = y_0 = z_0 = 0, v_{y0} = 0$ としよう. こうしても一般性を失わない. (平行移動と回転でこうできる)

$$y(t) = 0, \tag{27}$$

$$x(t) = v_{x0} t, \tag{28}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{z0} t. \tag{29}$$

運動の様子



最高点 高さ $z(t)$ が最大となるのは，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ のとき．その時刻 $t = T_1$ は，$-gT_1 + v_{z0} = 0 \rightsquigarrow T_1 = v_{z0}/g$.

その時刻での位置 (最高点の位置) は，$\boxed{18 \qquad\qquad\qquad\qquad}$.

到達距離 出発点の高さ $z(0) = 0$ と同じ高さ $z(t) = 0$ に再びなる時刻 $t = T_2$ は，$-\frac{1}{2}gT_2^2 + v_{z0}T_2 = 0 \rightsquigarrow T_2 = 2v_{z0}/g$.

地表面から出発したとすると，これが落下時刻.

この間に x 方向に移動する距離 (到達距離) は $\boxed{19 \qquad\qquad\qquad}$.

3.4 微分方程式

未知関数 $x(t)$ に関する方程式で, 微分を含んでいるものを 微分方程式 という.

求めるのは未知数でなく未知関数!

$x(t)$ を求める (微分を含まない式にする) ことを, 微分方程式を解く (微分方程式を積分する) という.

$x(0)=0$ や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(3)=2$ のような, 特定の時刻 t についての条件を, 初期条件 という.

ここまで出てきた微分方程式はいちばん簡単なタイプ. (2 階常微分方程式の中の特別に簡単なもの)

数理情報学科の数学の先生たちの多くは微分方程式の専門家.

他の科目との関係

- 数値計算法 (2), 計算科学 (3): 微分方程式を計算機で数値的に解く.
- 数理モデル基礎 (2), 現象の数学 (3), 非線形解析 (3): より進んだ微分方程式の扱い.
- 偏微分方程式 (3), 多様体と力学系 (4): より進んだ微分方程式の数学的に厳密な取り扱い.
- 力学 I(2), 力学 II(3) 電磁気学 (2): 微分方程式が使われる物理.

3.5 今週の quiz

1. 質量 $m=1$ の物体が, 力 $\vec{F}=(1,t^2,0)$ を受けている．時刻 $t=0$ には, $\vec{r}(0)=(0,1,0), \vec{v}(0)=(0,0,0)$ だったとする．物体の運動を求めよ．また, (x,y)-空間での運動の軌跡を描け.

2. 重力 mg のもとでの質量 m の物体の運動を考える．上と同様に鉛直方向に z 軸, 水平面内に x,y 軸をとる．地表の高さを $z=0$ とする．時刻 $t=0$ に, 原点の直上で, 高さ $z=h$ の点から, xz 面内の, 地表面と角 θ をなす方向に, 初速の大きさ v_0 で, 物体を発射した．運動方程式と初期条件を書け (解かなくてよい).

お知らせ

チューター

曜日	時間	担当	部屋
月	12:30〜14:30	前	1 号館 615
月	12:30〜13:30	郷原	1 号館 539
水	12:30〜13:30	田中	1 号館 530
木	12:30〜13:30	前	1 号館 615
金	15:10〜16:40	近藤	1 号館 541

予定

- **秋のプチテスト** 11/15 (**予定**). **配点** 15 **点**
- **冬のプチテスト** 12/20 (**予定**). **配点** 25 **点**

3.6 先週の quiz の略解と復習

1.

20

$$x(t) = \tfrac{1}{2}t^2, \quad y(t) = \tfrac{1}{12}t^4 + 1, \quad z(t) = 0. \tag{30}$$

軌跡とは, (x, y) **平面上の曲線で**, **それにそって物体が運動したもののこと**. **それを表わす** x, y **の式を求めるには**, $x = x(t)$ **と** $y = y(t)$ **から** t **を消去すればよい**.

$$y = \tfrac{1}{3}x^2 + 1. \tag{31}$$

2. **注意**: $\boxed{\vec{F} = (0, 0, -mg) \text{ は運動方程式ではない}}$

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \quad m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg. \tag{32}$$

初期条件は

$$x(0) = y(0) = 0, \quad z(0) = h, \tag{33}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \sin\theta. \tag{34}$$

4 変数分離型微分方程式

4.1 空気抵抗のある場合の運動

佐本 8.1.1

空気抵抗だけを受ける, 1 次元の運動を考えよう. たとえば, エアホッケーのパックの運動.

物体の受ける $\boxed{\text{空気抵抗}}$ は, 向きは速度 $v(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ と反対向き, 大きさは速さ $|v(t)|=|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)|$ に比例.

$$\text{空気抵抗の力}\quad F=-k\times v(t)=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\quad (k\ \text{は正の比例定数}) \tag{35}$$

質量を m とすると運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \tag{36}$$

1 階微分で書こう. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ なので,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{k}{m}v(t).} \tag{37}$$

しばらくこのタイプの微分方程式の解を考えよう. 微分すると自分の $-k/m$ 倍になる関数って何?

$$v(t) = \boxed{}\ 21 \tag{38}$$

4.2 変数分離型微分方程式の解き方

例題 5 次の性質を満たす関数 $x(t)$ を求めよう.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t), \qquad \text{初期条件 } x(0) = 4. \tag{39}$$

(文字 v を x に変えましたが, 深い意味はありません).

間違いの例 1. 両辺を '積分' して,

$$x = x^2 + C.\text{よって } x = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4C}}{2}. \tag{40}$$

あれっ, x って t の関数 $x(t)$ じゃなかったの?

間違った点: 22

両辺を t で積分する (両辺に $\int \cdots \mathrm{d}t$ をつける) ならよい.

間違いの例 2. 両辺を t で積分して,

$$x(t) = \int 2x(t)\mathrm{d}t + C. \tag{41}$$

正しくない点: 23

2 次方程式 $x^2 + 2x + 1 = 0$ の解を $x = -\frac{1}{2}(x^2+1)$ と答えるようなもの.

正しい解き方の例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2x(t) \tag{42}$$

まず $x(t)$ を左辺に集める．今の式には t はないが, あれば右辺に集める.
以下の例題を参照.

$$\frac{1}{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2 \tag{43}$$

両辺を t で積分

$$\int \frac{1}{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t = \int 2\, \mathrm{d}t \tag{44}$$

ここで,

$$\textbf{右辺} = \int 2\, \mathrm{d}t = 2t + C_1. \tag{45}$$

一方, **左辺で変数変換**. **変数を** t **から** $s = x(t)$ **に変えて置換積分**.

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t \tag{46}$$

なので,

$$\textbf{左辺} = \int \frac{1}{s}\, \mathrm{d}s = \log|s| + C' = \log|x(t)| + C_2. \tag{47}$$

よって,

$$\log|x(t)| = 2t + C' (= 2t + C_1 - C_2) \tag{48}$$

両辺の exp をとって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\log|x(t)|} &= \mathrm{e}^{2t+C'} && (49)\\
|x(t)| &= \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{C'} && (50)\\
x(t) &= \pm\,\mathrm{e}^{C'}\mathrm{e}^{2t} && (51)
\end{aligned}
$$

$\pm\mathrm{e}^{C'}$ は任意の実数値をとれる．これを積分定数 C とおく．

$$
x(t) = C\mathrm{e}^{2t} \tag{52}
$$

初期条件 $x(0) = 4$ より, $C = 4$

$$
x(t) = 4\mathrm{e}^{2t} \tag{53}
$$

これが答え．必ず検算しよう．

覚え方 (この科目の試験ではこのやり方でいい)

24

上で見た解き方は,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x)g(t) \tag{57}$$

のような形 ($\boxed{\text{変数分離形}}$) のときに使える.

いままでやってきた微分方程式も, 実は変数分離形と思える. 当面, すべての微分方程式はこの方法で解くと考えよう.

例. 落体の運動

運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg \tag{58}$$

これは変数分離形 ($f(x) = 1, g(t) = -mg$ などと思える). 両辺に $\mathrm{d}t$ をかけて

$$\mathrm{d}v = -\,g\;\mathrm{d}t \tag{59}$$

両辺に $\int$ をつけて

$$\int 1 \, \mathrm{d}v = \int (-g) \, \mathrm{d}t + C \qquad (C \text{ は積分定数}) \tag{60}$$

$$v(t) = -gt + C \tag{61}$$

例題 6

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{t}{x(t)}, \quad x(0) = 2. \tag{62}$$

を解こう

25

4.3 今週の quiz

次の微分方程式を，それぞれ，初期条件のもとで解こう．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t), \quad x(0) = 2. \tag{63}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -2x(t), \quad x(0) = 2. \tag{64}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \tag{65}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \tag{66}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \tag{67}$$

秋のプチテスト

日時 11/15(金)14:15-15:00. なお, 13:30–14:15 は講義をします.

場所 1-107 講義室 (通常通りですが, 講義のはじめから座席指定します)

持込 すべて不可.

出題範囲 11/1(金) の講義の内容まで. 運動の法則. 運動方程式. 変数分離型微分方程式の解法.

成績 この試験の成績は, 科目の成績 100 点のうち 15 点分にあたります. 今回と今後の試験の成績通知はメールで行います. ただし, 龍大インターネットのメールアドレスを以下のように 登録した人にのみ 行います. 個別の成績の問い合わせには応じられません. ページ `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html` の手順にしたがって, `hig-mark@bird.math.ryukoku.ac.jp` にメールを送って登録してください. 携帯電話への転送方法も上のページに書いてあります.

4.4 先週の quiz の略解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t), \quad x(0) = 2. \leadsto x(t) = C\mathrm{e}^{t}, \quad C = 2. \tag{68}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -2x(t), \quad x(0) = 2. \leadsto x(t) = C\mathrm{e}^{-2t}, \quad C = 2. \tag{69}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -x(t)^2, \quad x(0) = 2. \leadsto x(t) = \frac{1}{t+C}, \quad C = 1/2. \tag{70}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -1 - x(t), \quad x(0) = 2. \leadsto x(t) = -1 + C\mathrm{e}^{-t}, \quad C = 3. \tag{71}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = t \cdot x(t), \quad x(0) = 2. \leadsto x(t) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}, \quad C = 2. \tag{72}$$

ちょっとだけ説明

26

5 空気抵抗のある場合の落下運動

5.1 鉛直方向の運動

質量 m **の物体が重力** $-mg$ **と空気抵抗の力** $-k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **のもとで運動する. 鉛直上向きに** z **軸をとり, 時刻** t **の位置を** $z(t)$ **とする. 運動方程式は**

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg+k\times\left\{\begin{array}{ll} +\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)<0\right) \\ -\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right| & \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)>0\right) \end{array}\right\} = -mg+k\times\left(-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right) \tag{73}$$

第 2 項の符号がこれでよいこと. $+$:**上向き.** $-$: **下向き.**

速度	$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$	1 **行目** $\pm\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right|$	2 **行目** $-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$
下向き	$(-)$	$(+)\times(+)=(+)$	$(-)\times(-)=(+)$
上向き	$(+)$	$(-)\times(+)=(-)$	$(-)\times(+)=(-)$

$k\times\left(-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ **の** $-$ **は速度ベクトルと反対向きの力であることを意味.**

2 **階は** 1 **階ずつ考えるのだった**. $v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **なので**,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -g - \frac{k}{m}v(t). \tag{74}$$

を $v(t)$ **について解く**. **これは変数分離型なので**, v **を左に** t **を右に**.

27

よって解は,

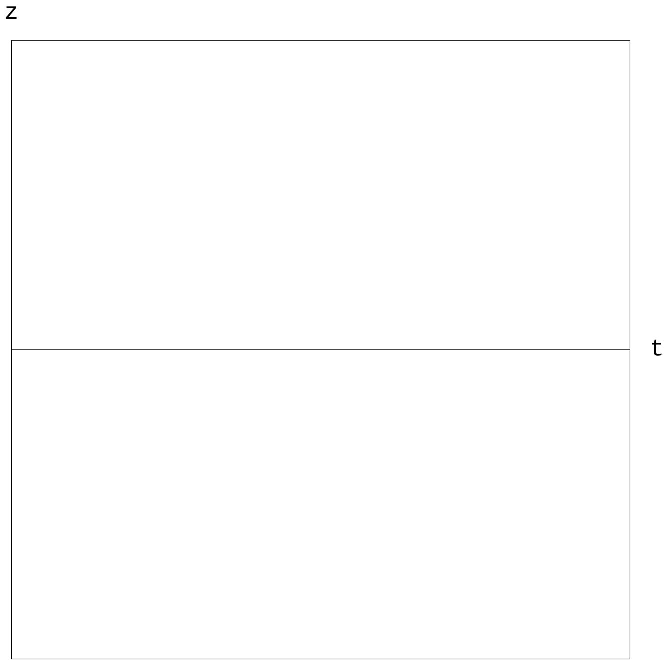
$$v(t) = \boxed{28} \tag{75}$$

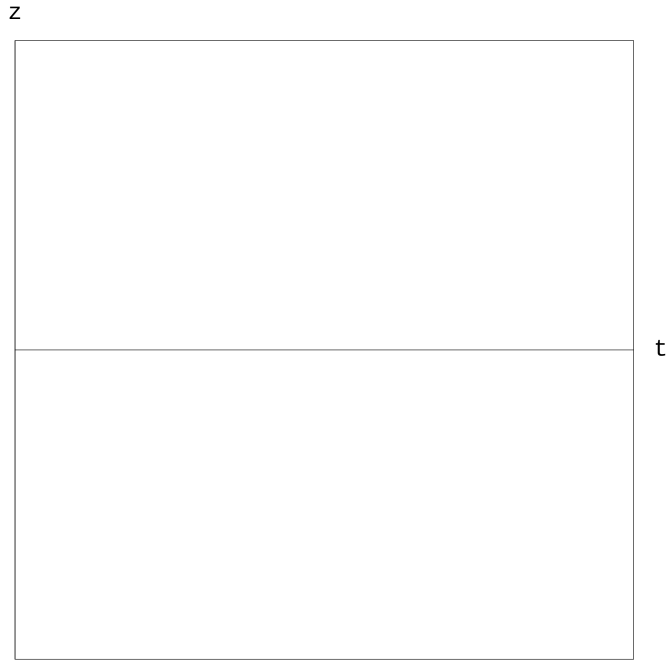
$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ なので, これを $z(t)$ についての変数分離型微分方程式とみて解く.

29

$$z(t) = C_2 - \frac{mg}{k}t + C_1 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{76}$$

なお, $t \to \infty$ で $v(t) \to v_\infty = -\frac{mg}{k}$ となる. この v_∞ を 終端速度 という. 微分方程式を解かなくても, $0 (= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)) = -g - \frac{k}{m}v_\infty$ を解くだけで得られる.


z
t


z
t

黒板での部分分数展開の説明

5.2 きょうの quiz

1. 次の変数分離型微分方程式を解こう．積分定数は決めなくてよい．(Hint. 右辺を因数分解して部分分数展開)

$$3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x(t)^2 - x(t) - 2 \tag{77}$$

2. 1 次元を運動する質量 $m = 1$ の物体の, 時刻 t の位置を $x(t)$ とする．この物体は, 速度 $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ によって決まる力 $F = -v(t) - v(t)^2$ を受けている．時刻 $t = 0$ での速度は $v(0) = 1$ である．
   (a) 運動方程式を書こう．
   (b) 初期条件を書こう (1 個しかない)．
   (c) 時刻 $t = 1$ における速度 $v(1)$ を求めよう．

3. 次の変数分離型微分方程式を解こう．積分定数は決めなくてよい．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t) + 2 = 0. \tag{78}$$

5.3 前回の quiz の略解

1. **部分分数展開を用いて**,

$$x(t) = \frac{2 + C\mathrm{e}^t}{1 - C\mathrm{e}^t}. \tag{79}$$

2. (a) $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **に対して**

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -v(t) - v(t)^2. \tag{80}$$

または $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2. \tag{81}$$

(b) $v(0) = 1$. ($\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) =?$ **は初期条件でない**)

(c) $v(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^t - 1}$ **などより** $v(1) = \frac{1}{2\mathrm{e} - 1}$.

3.

$$x(t) = -\frac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-4t}. \tag{82}$$

6 3次元の運動

6.1 空気抵抗がない場合の放物運動

佐本 2.2,2.4

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 地表の高さを $z = 0$ とする.

地表近くの, 質量 m の物体には,
大きさ mg, 鉛直下向きの $\boxed{\text{重力}}$ $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg)$ が働く.

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$: $\boxed{\text{重力加速度}}$.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0. \end{cases} \tag{83}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 階 $\times$ 3 次元 $=$ 6 個.

簡単のために, $x_0 = y_0 = z_0 = 0, v_{y0} = 0$.

$$y(t) = 0, \tag{84}$$

$$x(t) = v_{x0} t, \tag{85}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{z0} t. \tag{86}$$

(x, z) 空間での運動の軌跡を求めよう

(85),(86) から t を消去しよう. (85) から $t = x(t)/v_{x0}$ なので,

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{x0}} \right)^2 + v_{z0} \left(\frac{x}{v_{x0}} \right) \tag{87}$$

$$= -\frac{g}{2v_{x0}^2} \left[x^2 - 2\frac{v_{x0}v_{z0}}{g} x \right] \tag{88}$$

平方完成 $\rightsquigarrow$ $$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2} \left[\left(x - \frac{v_{x0}v_{z0}}{g} \right)^2 - \left(\frac{v_{x0}v_{z0}}{g} \right)^2 \right] \tag{89}$$

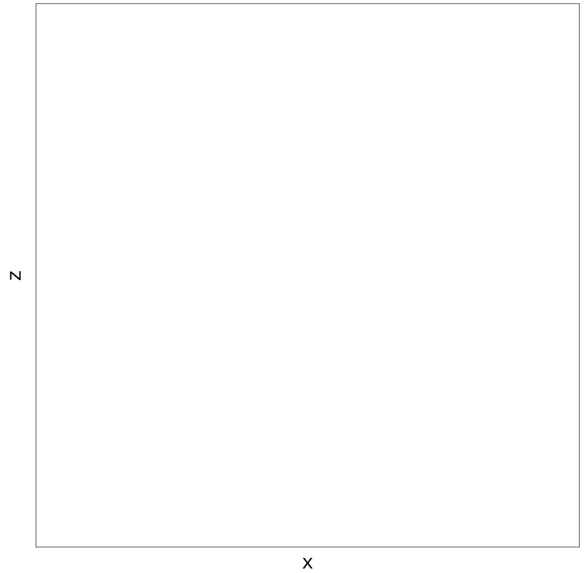
$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2} (x - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{90}$$

平方完成 $\Leftrightarrow$ $$x^2 - 2Ax = (x - A)^2 - A^2 \tag{91}$$

$\boxed{\text{放物線}}$!

最高点 $(x_{\mathrm{m}}, z_{\mathrm{m}}) = \boxed{30 \qquad\qquad}$.

落下点 $(2x_{\mathrm{m}}, 0)$.



例題 7 **時刻** $t = 0$ **に，初速度の大きさ** v_0**，鉛直上向きから測って角度** ϕ **の方向に発射するとき，上の積分定数** v_{x0}, v_{z0} **を求めよ．**

31

6.2 空気抵抗がある場合の放物運動

質量 m の物体を考える. 鉛直上向きに z 軸, 水平方向に x 軸をとる.

z 軸方向の単位ベクトルを $\vec{e}_z$ とかくと, 位置 $\vec{r}(t) = (x(t), z(t))$ に対する運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\vec{e}_z - k\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t). \tag{92}$$

成分で書いて,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{32}, \tag{93}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{33} \tag{94}$$

まず, $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$, $v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ に対する 1 階の微分方程式と考え,

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -kv_x(t), \tag{95}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - kv_z(t) \tag{96}$$

を別々に変数分離型微分方程式として解く.

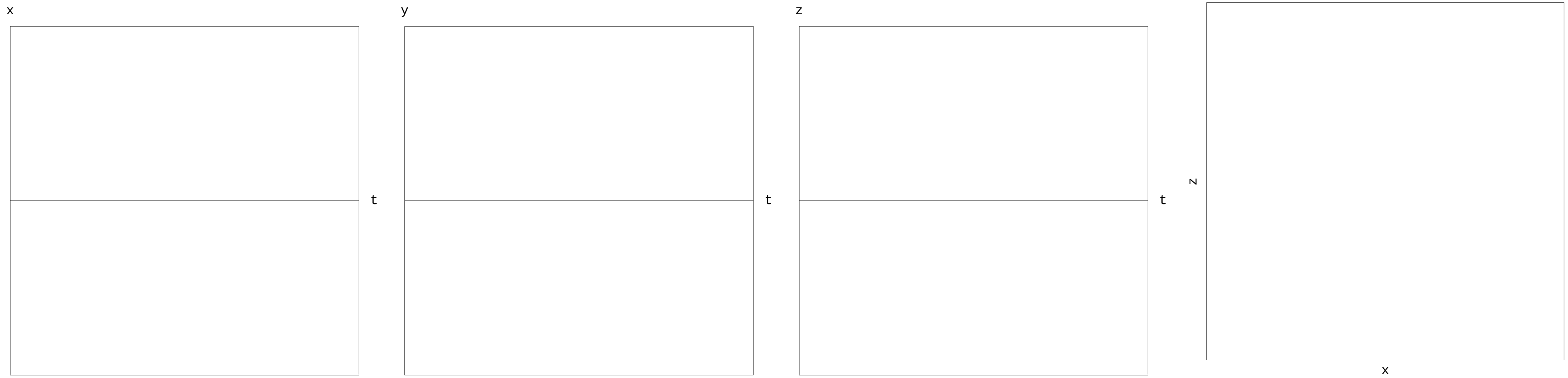
$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{97}$$

$$v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{mg}{k} + C'\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{98}$$

$x(t), z(t)$ について解くと,

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}, \tag{99}$$

$$z(t) = C_3 - \frac{mg}{k}t + C_4\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \tag{100}$$



	終端速度 $v_{+\infty}$($t \to +\infty$ での速度)	x 方向の到達距離
空気抵抗あり	34	$< C_1$
空気抵抗なし	35	$2x_{\mathrm{m}}$

終端速度の簡単な求め方

$\vec{F}$ が $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ だけの関数であるとき, $\vec{F}(v_{+\infty}) = \vec{0}$ を v について解けばよい.

例: 36

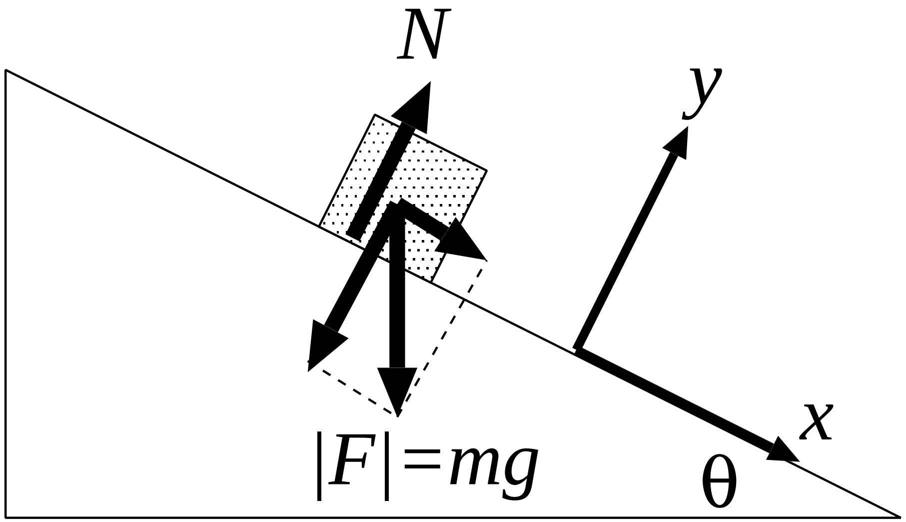
7 斜面に沿う運動

佐本 4.1

水平から θ だけ傾いたなめらかな斜面をすべる物体 (質量 m) を考える.

運動方程式 (はたらく力は, $\vec{F}$: 重力, $\vec{N}$: 垂直抗力.)

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} + \vec{N}. \qquad (101)$$



37 なので, 成分で書くと,

$$x \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg\sin\theta, \qquad (102)$$

$$y \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\cos\theta + N. \qquad (103)$$

例題 8 上の状況で, 時刻 $t=0$ に, $x=x_0$ から, 上向きに速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=v_{x0}<0$ で打ち出したときの運動を, 運動方程式を解いて求めよう.

38

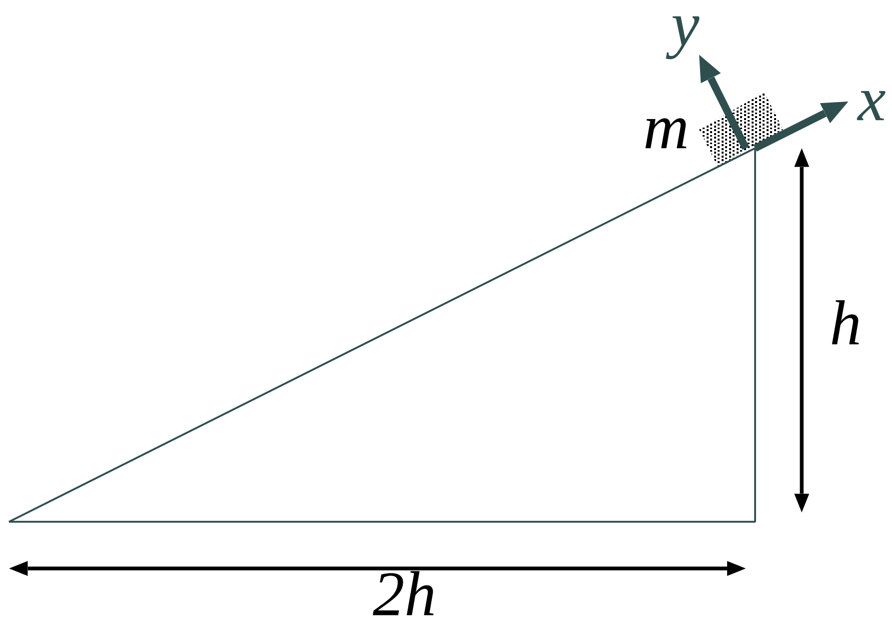
運動方程式を解くと, x_0, v_{x0} は積分定数として,

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 + v_{x0}t + x_0, \tag{104}$$

$$y(t) = 0. \tag{105}$$

きょうの quiz

1. **図のようななめらかな斜面の上を**, **重力を受けて運動する**, **質量** m **の物体の運動を考える**. **時刻** $t = 0$ **では**, **物体は**, **斜面の上端** $x = 0$ **に静止している**.
   (a) **垂直抗力の大きさを** N **として**, x, y **方向の運動方程式を書こう**.
   (b) **垂直効力の大きさ** N **を求めよう**.
   (c) **運動方程式を解いて**, **斜面の下端に達する時刻を求めよう**.



2. 質量 m の物体の鉛直方向 1 次元の運動を考える．時刻 t の位置を，上向きを正にはかり，$z(t)$ とする．下向きの重力 mg と，速度の 3 乗に比例する空気抵抗 $F = -\beta(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t))^3$ $(\beta > 0)$ がはたらいているとする．

   (a) 運動方程式を書こう．

   (b) 終端速度 v_∞ を求めよう．

7.1 前回の quiz の略解

1. (a) **斜面の傾きの角度を θ とする**. $\sin\theta = 1/\sqrt{5}, \cos\theta = 2/\sqrt{5}$.

$$x \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\sin\theta, \tag{106}$$

$$y \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\cos\theta + N, \tag{107}$$

(b) **初期条件は** $x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **のもとで**, $x(t) = -\sqrt{5}h$ **となる時刻** $t > 0$ **を求めると**, $t = +\sqrt{10h/g}$. **垂直抗力は** $N = \frac{2}{\sqrt{5}}mg$.

2. (a)

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - \beta\cdot\left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)^3. \tag{108}$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ **とすると**, $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - \beta\cdot v(t)^3$ **とかける**.

(b) $t \to +\infty$ **で**, $v(t) \to v_\infty$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \to 0$ **となるとすると**,
$0 = -mg - \beta\cdot(v_\infty)^3$. **よって**, $v_\infty = -(mg/\beta)^{1/3} < 0$.

8 摩擦力

佐本 4.3

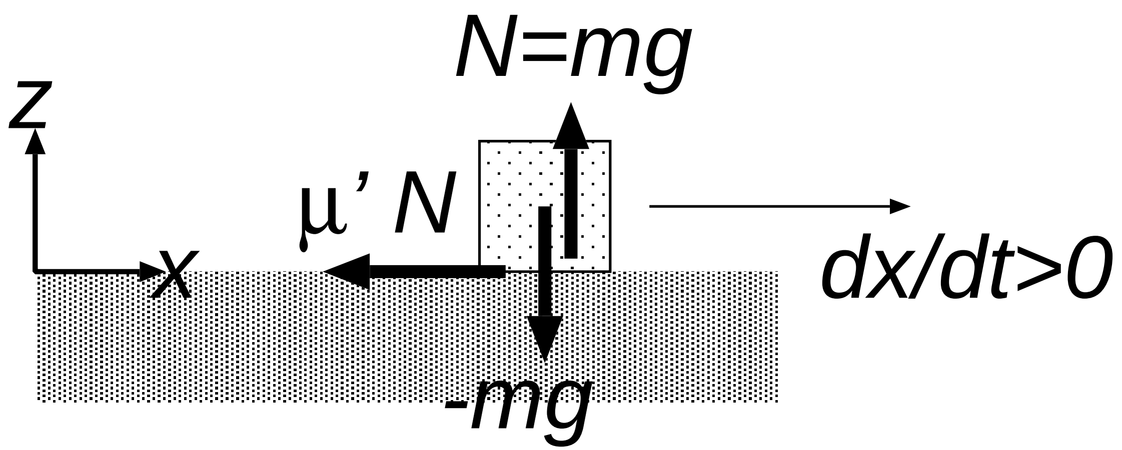
8.1 水平面上の動摩擦力

力を受けずに, なめらかでない (=粗い) 面上を運動する物体は, だんだん速さが遅くなり, 最後は止まってしまう. これは, ニュートンの第 1 法則に反するように見えるが, 実は, 粗い面が物体に,

摩擦力 (動摩擦力) を及ぼしているためである.

動摩擦力

は, 速さを減らすようにはたらき, 大きさは, 垂直抗力 N に比例する. 比例定数 μ' は 動摩擦係数 とよばれ, 面の性質, 物体と面の接



する面積などによってきまる.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=\begin{cases}-\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)>0\right)\\ 0 & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=0\right)\\ +\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)<0\right)\end{cases} \tag{109}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=\boxed{39\qquad\qquad}\qquad\boxed{40\qquad\qquad} \tag{110}$$

N: 垂直抗力 (面が物体に及ぼす力)

例題 9 水平な粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える．水平方向に x 軸，鉛直方向に z 軸を取る．時刻 $t=0$ に初速度 $(v_x, v_z) = (v_0, 0), v_0 > 0$ で水平に物体を発射したところ，一直線上を運動した．物体にはたらく力は重力と動摩擦力だけだった．ただし，物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする．

1. 水平，鉛直それぞれの方向の運動方程式をたて，初期条件をかこう．

2. 時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよう．

3. 物体が静止するまでに進む距離を求めよう．

1. 垂直抗力の大きさを N として，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' N \tag{111}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + N \tag{112}$$

初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$, $(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0, z(0) = 0)$.

$$\boxed{41\qquad\qquad\qquad\qquad}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' g \tag{113}$$

2. 積分すると,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\mu' g t + C_1, \tag{114}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu' g t^2 + C_1 t + C_2. \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \tag{115}$$

$$\text{初期条件より}, \boxed{42\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{116}$$

物体が静止する時刻 $t = T$ は $\boxed{43\qquad\qquad}$ から決まり, $T = \frac{v_0}{\mu' g}$.

3. $t = 0$ から $t = T$ の間に物体の進んだ距離は,
$|x(T) - x(0)| = \left| -\frac{1}{2}\mu' g (\frac{v_0}{\mu' g})^2 + v_0 \frac{v_0}{\mu' g} + C_2 - C_2 \right| = \frac{v_0^2}{2\mu' g}$.

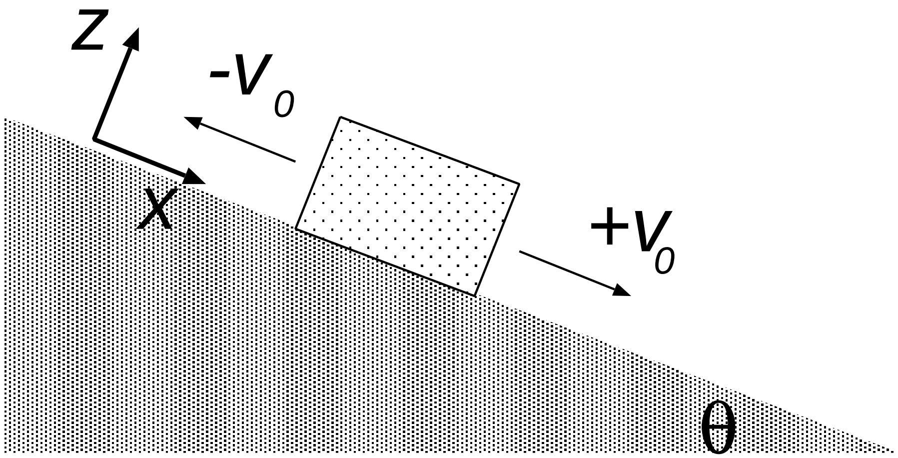
8.2 斜面と摩擦

佐本 4.3, 4.2

例題 10 角度 θ だけ傾いた粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える. 斜面と平行な方向に x 軸, それと垂直な方向に z 軸を取る.

時刻 $t = 0$ に原点から初速度の大きさ v_0 で物体を斜面にそって下向きに発射した. 物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする.

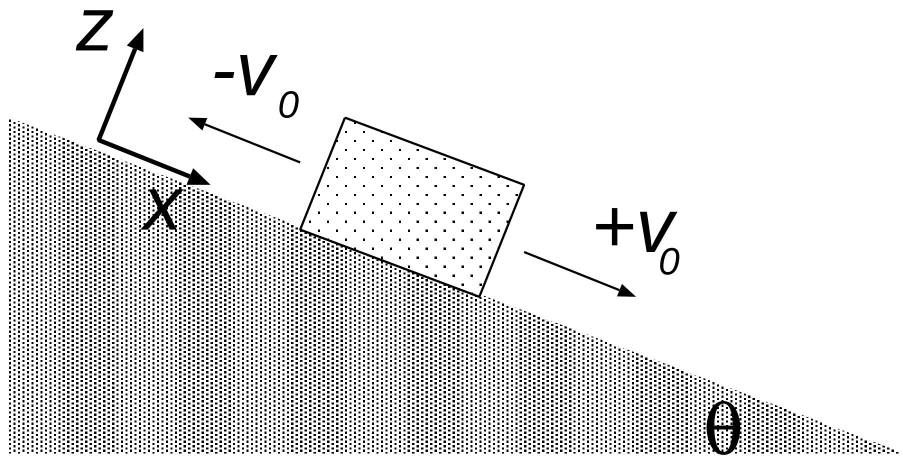
1. x, z それぞれの方向の運動方程式をたてよう.
2. 時刻 $t = 0$ 以降の物体の運動を求めよう.
3. 物体が斜面の途中で止まるための θ に対する条件を求めよう.



quiz

例題と同じ状況で, 物体を, 初速度の大きさ v_0 で斜面にそって上向きに発射した場合の運動を求めよう. 物体が止まるまでに登る高さを求めよう.

Hint. **運動方程式の形は変わる. たてなおそう.**



8.3 静止摩擦力

上では, 物体が動いている状況を考えた.

一方, 粗い面上に止まっている物体は, 水平方向に小さい力で押しても動き出さない. これは, 加えられた力 $\vec{F}$ と

大きさは 44

向きは 45

の 静止摩擦力 $-\vec{F}$ が働くためである. 静止摩擦力の大きさは, 加えられた力に応じて変化する.

静止摩擦力の大きさ $|\vec{F}|$ は, 最大でも μN である. ここで, N は垂直抗力. μ は 静止摩擦係数 とよばれる比例係数. 最大静止摩擦力より大きな力を加えて初めて, 物体は動き始める. 以後は, 動摩擦力のみが働く.

静止摩擦係数と動摩擦係数の間には, 46 という関係が成り立つ.

例題 11　**静止摩擦係数 μ の水平面にある, 質量 m の物体に水平方向に力を加える. 動き始める瞬間の力を求めよう.**

47

例題 12　**静止摩擦係数 μ の斜面の傾きの角度を徐々に大きくしていったところ, 傾きの角度 θ で動き始めた. θ と μ の関係を求めよう.**

48

quiz

静止摩擦係数 μ の水平面に, 質量 m の物体を置き, 水平方向に大きさ F の力を加えたところ, 動き出した.

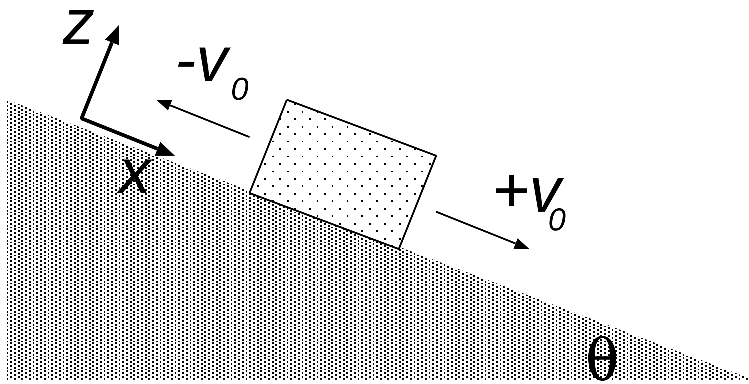
力 F が加わっても動き出さないように, 物体の上に質量 M の重りを置くことにする. 重りの質量は M はどれだけ以上である必要があるか.

先週の quiz の解答

垂直抗力の大きさを N として, 運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = +\,mg\sin\theta + \mu' N \tag{117}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\cos\theta + N \tag{118}$$



初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -v_0$.

斜面から離れない条件 $z=0$ と (118) から, $N = mg\cos\theta$. (117) に代入して解くと,

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)t^2 + C_1\cdot t + C_2. \tag{119}$$

初期条件より, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = C_1 = -v_0$.

静止する時刻 $t = T$ **は** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$ **から**

$$T = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)}. \tag{120}$$

と求まる. **時刻** $t = 0$ **から** $t = T$ **までに** x **方向に進んだ距離は**,

$$|x(T) - x(0)| = \left| -\frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)} \right|. \tag{121}$$

登った高さは, $\cot\theta = 1/\tan\theta$ **を用いて**,

$$|x(T) - x(0)| \sin\theta = \frac{v_0^2}{2g(1 + \mu' \cot\theta)}. \tag{122}$$

先週の quiz の解答 質量 M の重りをのせてぎりぎり動き出す場合を考えると,

$$0 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F - \mu N, \tag{123}$$

$$0 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = N - (m+M)g \tag{124}$$

よって, $F = \mu(m+M)g$ すなわち, $M = \frac{F}{\mu g} - m$ 以上である必要がある. 問題文の前半は, $\frac{F}{\mu g} - m > 0$ を保証している.

アンケートへの記入の一部とその返事

- きょうのやり方はよかった.
- きょうのやり方はよくなかった.
- もっとゆっくり進んでほしい
- もっと問題をたくさん解いてほしい.
- .... してほしい.
- 空欄を埋めたプリントを web に置いてほしい.
- プチテストの答案のどこが間違っていたかわからない.
- 年令と出身は.

個別にお返事できませんが, すべて読ませてもらいました. ありがとうございます.

9 単振動 (調和振動) と減衰振動

quiz パチンコで, 玉の速さを 2 倍にするには, ひきがねは何倍ひけばよいか. パチンコで, 玉の届く高さを 2 倍にするには, ひきがねは何倍ひけばよいか. 空気抵抗がある場合はどうか.

9.1 ばねの運動

佐本 4.4

バネの先についた物体 (質量 m) の運動を考えよう.

自然長: 力が加わっていないときのバネの長さ

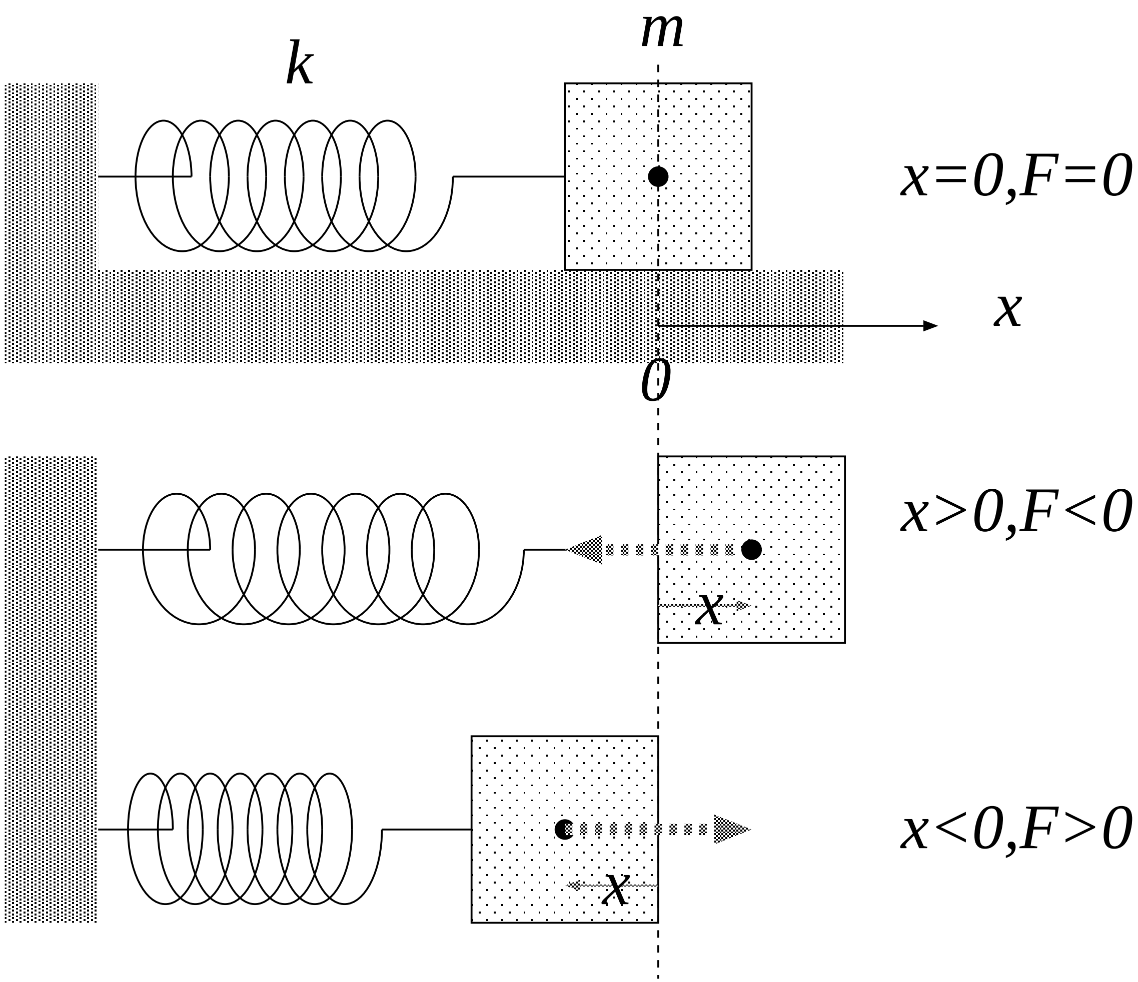
変位: $x(t) =$ (変化後のバネの長さ) $-$ (自然長)

$$\text{バネの復元力} \qquad F = -k \times x(t) \quad \text{(フックの法則)} \tag{125}$$

$k > 0$: バネ定数. バネの強さを表す.

大きさは変位に比例. 変位を小さくするようにはたらく $\rightsquigarrow -kx(t)$

変位を小さくするようにはたらく (だからマイナス).



運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{126}$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \qquad (\omega = \sqrt{k/m}) \tag{127}$$

これの解を教えちゃおう. C_1, C_2 **は積分定数として**,

$$\boxed{\textbf{公式}} \boxed{\quad 49 \quad} \tag{128}$$

はこの微分方程式の解. **なぜなら**

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) \\ =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)) \\ =& (-C_1\omega^2\cos(\omega t) - C_2\omega^2\sin(\omega t)) \\ =& -\omega^2(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) = -\omega^2 x(t).\end{aligned} \tag{129}$$

実は, **これ以外の解はない** (**来年**, **数理モデル基礎** I **で学びます**).

このような運動を $\boxed{\text{単振動 (調和振動)}}$ **という.**

例題 13　次の微分方程式を解き, 初期条件 $x(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ **から積分定数を決めよう.**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = 0 \tag{130}$$

50

9.2 空気抵抗のもとでのばねの運動

速度に比例する空気抵抗 $-c \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **もある場合を考えよう**.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{133}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{134}$$

このときの運動を $\boxed{\textbf{減衰振動}}$ **という**.

一般に,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b\cdot x(t) = 0. \quad (a,b\ \textbf{は定数}) \tag{135}$$

というタイプの微分方程式を考えよう.

例題 14

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 3 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 2 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{136}$$

51

実は, 任意の C_1, C_2 に対して,

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \tag{140}$$

も解になっている. なぜなら,

$$\begin{aligned}\text{左辺} =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + 2(C_1 x_1 + C_2 x_2) \\ =& C_1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + 2x_1\right) + C_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + 2x_2\right) \\ =& C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

実は C_1, C_2 は積分定数. 初期条件と $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{-2t}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -C_1 \mathrm{e}^{-t} - 2C_2 \mathrm{e}^{-2t}$ から $C_1 = 2$, $C_2 = -1$ となり,

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \tag{141}$$

$\boxed{\text{quiz}}$ 配った紙にやってね.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 3 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4 \tag{142}$$

9.3 だめな例

'$x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$' とおいてみる, は超便利. これまで出てきた他の場合にも使っちゃおう.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=2x(t)-1 \tag{143}$$

に $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる.

$$\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}=2\mathrm{e}^{\lambda t}-1.$$

$$(\lambda-2)\mathrm{e}^{\lambda t}=-1.$$

任意の t について成立するためには, $\lambda=2$ ととればいいというわけにはいかない. λ が 定数にならない. t に依存してしまう. おかしい.

$\rightsquigarrow$ **解は $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ とは書けない.**

別の解を推測するか, 別の方法で解くかしよう. この場合には, 前に習った通りに変数分離法で解けばよい.

9.4 虚数の指数関数

'$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$' とおく，は超便利．単振動にも使っちゃおう．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \tag{144}$$

は, $a = 0, b = 1$ の場合．やってみよう．

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

よって $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + x(t) = (\lambda^2 + 1)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm i \quad (?????)$

虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ は $i^2 = -1$ を満たす．複素数 $x + iy$ の i.

知らん顔して計算すると,

$$x(t) = D_1 \mathrm{e}^{it} + D_2 \mathrm{e}^{-it}. \tag{145}$$

は解. 初期条件より,

$$x(0) = D_1 \mathrm{e}^{i0} + D_2 \mathrm{e}^{-i0} = D_1 + D_2 = 1. \tag{146}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = iD_1 \mathrm{e}^{it} - iD_2 \mathrm{e}^{-it}\text{**だから**}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = iD_1 \mathrm{e}^{i0} - iD_2 \mathrm{e}^{-i0} = iD_1 - iD_2 = 0. \tag{147}$$

ここで $\mathrm{e}^0 = 1$ **を使った**.

解いて, $D_1 = D_2 = \frac{1}{2}$.

この解は $x(t) = \cos t$ **だったはず**.

$$x(t) = \cos t \overset{?}{=} \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{it} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{148}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\sin t \overset{?}{=} \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{it} - \tfrac{i}{2}\mathrm{e}^{-it}. \tag{149}$$

したがって,

$$(\textbf{上}) + \frac{1}{i}\cdot(\textbf{下}) = \cos t + i\sin t \overset{?}{=} \mathrm{e}^{it}. \tag{150}$$

9.5 オイラーの公式

気分のために t を θ とかく.

定義. 実数 θ に対して

$$\boxed{}_{52} \cdots \boxed{\text{オイラーの公式}} \tag{151}$$

定義. 複素数 $z = a + i\theta$ (a と θ は実数) に対して,

$$\boxed{}_{53} \tag{152}$$

3 年で関数論を学ぶと, これで 'よい' というのが心から納得できます.

性質. **複素数** $z = x + iy, w = u + iv$ **に対して**,

$$\boxed{e^{z+w} = e^z \times e^w}$$

証明.

$$\begin{aligned}
e^{z+w} =& e^{x+iy+u+iv} \\
=& e^{(x+u)+i(y+v)} \\
=& e^{x+u} e^{i(y+v)} \\
=& e^{x+u}(\cos(y+v) + i\sin(y+v)) \\
=& \cdots (\textbf{加法定理}) \cdots = e^x e^u e^{iy} e^{iv} \\
=& e^z \times e^w
\end{aligned} \tag{153}$$

例題 15 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) = 0. \qquad x(0) = 4, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{154}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は一般には複素数**) **とおくことによって解こう**.

54

55

quiz **微分方程式**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -4. \tag{159}$$

を, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **は一般には複素数**) **とおくことによって解こう**.

冬のプチテストのお知らせ

日時 12 月 20 日 (金) 14:15–15:00 (13:30–14:15 は講義です)

場所 1-107 講義室．講義の最初から座席指定します．

成績 この試験の成績は，科目の成績 100 点のうち 25 点を占めます．

試験範囲 12 月 13 日 (金) の講義まで．摩擦力のもとでの運動．斜面に沿う運動．単振動．$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + a \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b \cdot x(t) = 0$ 型微分方程式．変数分離型微分方程式．

成績の通知 冬のプチテストでもメールでの成績通知を行います．秋のプチテストの成績も併記しますので，登録がまだの人は登録しておきましょう．

補講のお知らせ

日時 12 月 27 日 (金) 2 講時 (いつもと違います)

場所 1-107 講義室．

9.6 $\frac{d^2x}{dt^2}(t) + a \cdot \frac{dx}{dt}(t) + b \cdot (t) = 0$ 型微分方程式の解き方

$$\text{微分方程式} \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) + a \cdot \frac{dx}{dt}(t) + b \cdot (t) = 0 \tag{160}$$

$$\text{初期条件 (たとえば)} \quad x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 1 \tag{161}$$

1. まず, (161) を満たさなくてもいいから, (160) の解を見つけよう. $x(t) = e^{\lambda t}$ (λ は定数) という形の解があるかもしれないと思って, これを (160) に代入.

2. λ についての 2 次方程式になる. 2 次方程式の 2 つの解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ が得られる.

3. $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ は (160) の解. つまり $\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3\frac{dx_1}{dt} + 2x_1 = 0, \frac{d^2x_2}{dt^2} + 3\frac{dx_2}{dt} + 2x_2 = 0.$

4. $x_1(t), x_2(t)$ とも, 普通は初期条件 (161) を満たさない. そこで, もっ

と他の解も見つけたい．ここで次の定理．

定理． $x_1(t), x_2(t)$ が (160) の解であるとき，任意の定数 C_1, C_2 に対して，$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ も (160) の解になっている．

証明． $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ に対して，(160) の左辺が 0 になればよい．

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} =& \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + b(C_1 x_1 + C_2 x_2) \\
=& C_1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + b x_1\right) + C_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + b x_2\right) \\
=& C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \qquad (x_1, x_2 \text{ は解なので})
\end{aligned}
$$

5. というわけで，$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ (C_1, C_2 は任意の定数) も (160) の解．実は，これ以外の解はない．

6. (161) に代入すると，C_1, C_2 についての連立方程式が得られる．これを解いて C_1, C_2 を決めると，(161), (160) の両方を満たす解が求まる．

先週の quiz の解答例

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)-3\cdot x(t)=0.\qquad x(0)=0,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4 \tag{162}$$

$x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **定数**) **を代入してみると**,

$$(\lambda^2+2\lambda-3)\mathrm{e}^{\lambda t}=0 \tag{163}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t}\neq 0$ **で割ると**,

$$(\lambda+3)(\lambda-1)=0. \tag{164}$$

解くと, $\lambda=-3,1.$ **よって**, $x(t)=C_1\mathrm{e}^{-3t}+C_2\mathrm{e}^{t}$ **は解** (C_1,C_2 **は任意の定数**) **これを初期条件に代入すると**,

$$x(0)=0=C_1+C_2 \tag{165}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=4=-3C_1+C_2. \tag{166}$$

これを解くと $C_1 = -1, C_2 = 1$. よって, 初期条件を満たす解は

$$x(t) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-3t} + 1 \cdot \mathrm{e}^{t}. \tag{167}$$

先週の quiz の解答例

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -4. \tag{168}$$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ 定数) を代入してみると,

$$(\lambda^2 + 16)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{169}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ で割ると,

$$(\lambda + 4i)(\lambda - 4i) = 0. \qquad (i^2 = -1) \tag{170}$$

解くと, $\lambda = \pm 4i$. よって, $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{+4it} + C_2 \mathrm{e}^{-4it}$ は解 (C_1, C_2 は任意

の定数) **これを初期条件に代入すると**,

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \tag{171}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -4 = 4iC_1 - 4iC_2 = 4i(C_1 - C_2) \tag{172}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = +i/2, C_2 = -i/2$. **よって**, **初期条件を満たす解は**

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{i}{2}(\mathrm{e}^{4it} - \mathrm{e}^{-4it}) \\ &= \tfrac{i}{2}([\cos 4t + i\sin 4t] - [\cos(-4t) + i\sin(-4t)]) \\ &= \tfrac{i}{2}([\cos 4t + i\sin 4t] - [\cos 4t - i\sin 4t]) \\ &= \tfrac{i}{2} 2i\sin 4t = -\sin 4t \end{aligned} \tag{173}$$

9.7 複素数について復習

定義. 実数 θ に対して

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \cdots \text{オイラーの公式} \tag{174}$$

定義. 複素数 $z = a + i\theta$ (a と θ は実数) に対して,

$$\boxed{\mathrm{e}^{a+i\theta} = \mathrm{e}^{a} \times \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{a}(\cos\theta + i\sin\theta).} \tag{175}$$

性質. 複素数 $z = x + iy, w = u + iv$ に対して,

$$\boxed{\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{w}} \tag{176}$$

$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の証明みたいなもの.

e^x の Taylor 展開で $x = i\theta$ とおくと,

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{177}$$

$$\mathrm{e}^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{178}$$

一方, $\cos\theta, \sin\theta$ の Taylor 展開より,

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots \tag{179}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots \tag{180}$$

$$i\sin\theta = i\theta - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{181}$$

したがって, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

例題 16 $z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}$ とおく．z, z^2, z^{100}, $1/z$ の実部，虚部を求めよう．

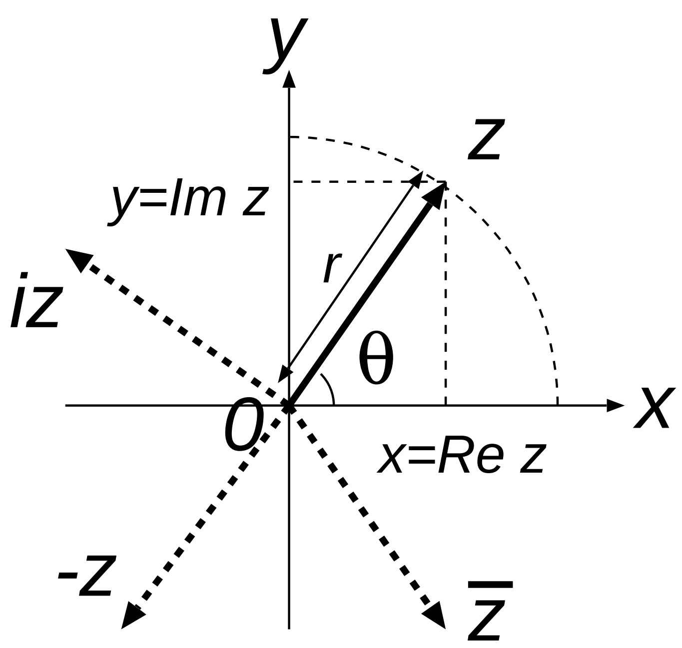
56

$z = x + iy$ は足し算が得意．$z = \mathrm{e}^{a+i\theta}$ は掛け算が得意．

9.8 複素数の極表示

x, y, r, θ **は実数**, $r \geq 0$.

		普通の表示	極表示
複素数	z	$= x + iy$	$= re^{i\theta}$
実部	$\mathrm{Re}\, z$	$= x$	$= r\cos\theta$
虚部	$\mathrm{Im}\, z$	$= y$	$= r\sin\theta$
絶対値	$\lvert z \rvert$	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r (\geq 0)$
偏角	$\arg z$	$= \arctan \frac{y}{x}$	$= \theta$
複素共役	$\bar{z}$	$= x - iy$	$= re^{-i\theta}$



複素平面

横軸に実部 x, **縦軸に虚部** y **を描いたもの**

いくつかの公式

(定義に戻ればすぐに導けるのでおぼえなくても OK).

$z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $(x, y, r, \theta$ **は実数**.)

e^z の性質.

$$\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{2\pi i} = 1, \mathrm{e}^{\pi i} = -1. \quad (182)$$

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z} = \mathrm{e}^x \quad (183)$$

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}, \quad \text{特に } \overline{\mathrm{e}^{iy}} = \mathrm{e}^{-iy}. \quad (184)$$

微分積分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{zt} = z\mathrm{e}^{zt}. \quad (185)$$

$$\int \mathrm{e}^{zt}\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt} + C. \quad (186)$$

オイラーの公式を逆に解いたもの

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}, \quad (187)$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \quad (188)$$

複素共役, -1 倍, 逆数.

$$\bar{z} = \overline{r\mathrm{e}^{i\theta}} = r\mathrm{e}^{-i\theta}, \quad (189)$$

$$-z = -r(\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}, \quad (190)$$

$$1/z = (r\mathrm{e}^{i\theta})^{-1} = (1/r)\mathrm{e}^{-i\theta} \quad (191)$$

例題 17

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{192}$$

57

58

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} \times (1 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t). \tag{198}$$

$\boxed{\text{quiz}}$ $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ の絶対値と偏角を求めよう． $z_2 = \mathrm{e}^{2+\frac{\pi}{6}i}$ の実部と虚部を求めよう．

$\boxed{\text{quiz}}$

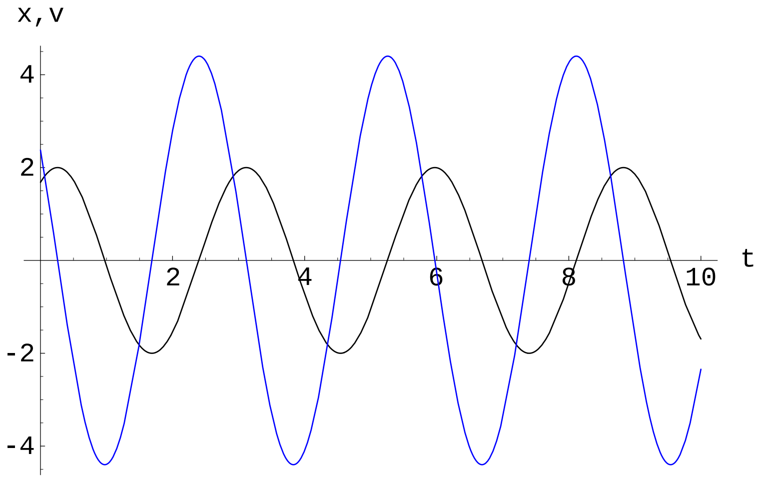
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 10 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8. \tag{199}$$

10 振動

10.1 単振動

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{200}$$



の解は $\lambda^2 + k/m = 0$ **の解**
を $\lambda = \pm i\omega,\ \omega = \sqrt{k/m})$ **とおいて**,

$$\begin{aligned} x(t) =& D_1\mathrm{e}^{i\omega t} + D_2\mathrm{e}^{-i\omega t} \\ =&(D_1 + D_2)\cos\omega t + i(D_1 - D_2)\sin\omega t \\ =&C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t. \end{aligned} \tag{201}$$

このような振動を $\boxed{\text{単振動 (調和振動)}}$ という.

$x(t)$ は実数なので, $D_1 = \bar{D}_2$ である. 極表示で

$D_1 = \frac{A}{2}\mathrm{e}^{i\theta_0}, D_2 = \frac{A}{2}\mathrm{e}^{-i\theta_0}$ とかこう. すると,

$$
\begin{aligned}
x(t) =& \frac{A}{2}\mathrm{e}^{i\theta_0}\mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{A}{2}\mathrm{e}^{-i\theta_0}\mathrm{e}^{-i\omega t} = \frac{A}{2}(\mathrm{e}^{i(\omega t+\theta_0)} + \mathrm{e}^{-i(\omega t+\theta_0)}) \\
=& A\cos(\omega t + \theta_0).
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = - A\omega\sin(\omega t + \theta_0)
$$

振幅 A [m] $\cdots$ $|x(t)|$ の最大値.

位相 $\omega t + \theta_0$ [rad]

初期位相 θ_0

$\boxed{59}$ ω [rad/s] (単位時間に進む位相)

$\boxed{60}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s] ($\omega T = 2\pi$ ごとに戻るから.)

$\boxed{61}$ $\nu = f = 1/T$ [Hz=1/s] (単位時間あたり何周期?).

パチンコの問題を力学で考えると.

例題 18 **バネ定数** k **のバネの先に, 質量** m **の物体がついている. 時刻** $t=0$ **に, バネを, 自然長よりも長さ** ℓ **だけ縮めて静かに離した.** $t=0$ **以降の運動を求め, 速さの最大値を求めよう.**

特別講義 **年に** 3 **回あるやつ.** 12 **月** 16 **日 (月)** 5 **講時.** 1-107 **講義室.**

冬のプチテスト 12 **月** 20 **日 (金)** 3 **講時.** 1-107 **講義室. 範囲は前回配布.**

補講 12 **月** 27 **日 (金)** $\boxed{2\ \text{講時}}$. 1-107 **講義室.**

前回 (2002/12/13) の quiz の略解

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i,\ z_2 = \mathrm{e}^{2+\frac{\pi}{6}i}$ に対して,

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2. \tag{202}$$

$$\arg z_1 = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}. \tag{203}$$

$$z_2 = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i} = \mathrm{e}^2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}\mathrm{e}^2}{2} + i\cdot\frac{\mathrm{e}^2}{2}. \tag{204}$$

前回 (2002/12/13) の quiz の略解

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 10\cdot x(t) = 0. \tag{205}$$

$$x(0) = 2,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8. \tag{206}$$

(205) の解をみつけるため, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入してみる.

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 10)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0. \tag{207}$$

$\mathrm{e}^{\lambda t}$ より, $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ であり, $\lambda = -1 \pm \sqrt{1^2 - 10} = -1 \pm 3i$. よって, (205) の解は, C_1, C_2 を任意の定数として,

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{(-1+3i)t} + C_2 \mathrm{e}^{(-1-3i)t}. \tag{208}$$

次に初期条件 (206) を考える. (208) を代入して,

$$x(0) = 2 = C_1 + C_2. \tag{209}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8 = (-1+3i)C_1 + (-1-3i)C_2. \tag{210}$$

この連立方程式を解いて, $C_1 = 1 + i, C_2 = 1 - i$. これを (208) に代入し,

$$\begin{aligned} x(t) =& \mathrm{e}^{-t}[(1+i)(\cos 3t + i \sin 3t) + (1-i)(\cos(-3t) + i\sin(-3t))] \\ =& \cdots = 2\mathrm{e}^{-t}(\cos 3t - \sin 3t). \end{aligned}$$

冬のプチテスト略解の訂正

ごめんなさい…

なお, 略解は 1-508 前引き出しで配布しています.

2(3)

$$
\begin{aligned}
(z_2)^{-10} &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)^{-10} = \frac{1}{2^5}\mathrm{e}^{\frac{10}{4}\pi i} \\
&= \frac{1}{32} \cdot \mathrm{e}^{+2\pi i} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{4}\pi i} = \frac{i}{32}.
\end{aligned} \tag{211}
$$

3(2) **移動した距離は,**

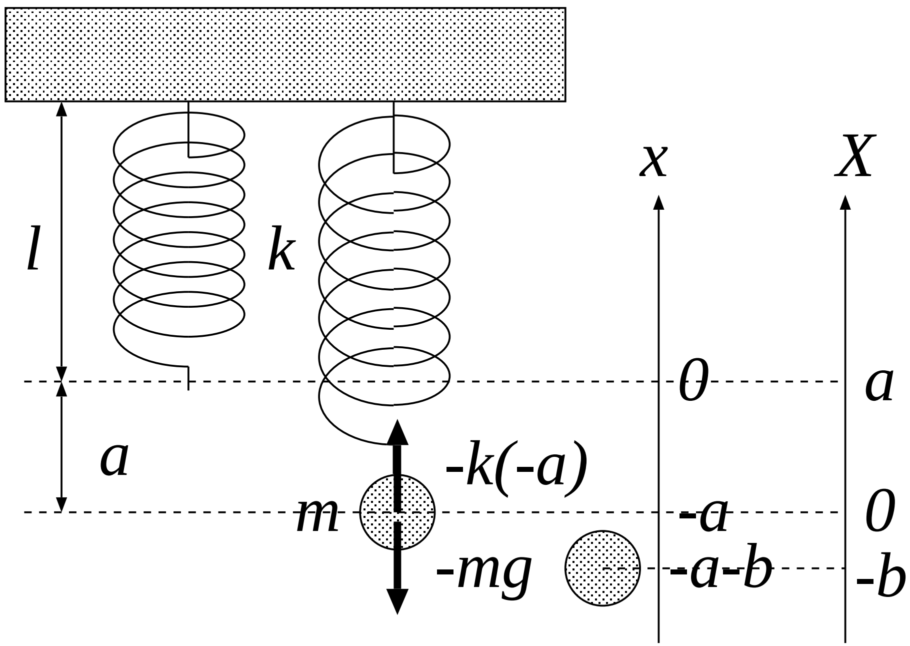
$$
|x(T) - x(0)| = \frac{V^2}{2g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)}. \tag{212}
$$

11 単振動の応用

自然長 l, ばね定数 k, 質量の無視できるばねを重力 (重力加速度 g) のもとで天井から鉛直方向につるす.

質量 $=0$ なので, ばねの下端は, 天井から自然長だけ離れる. 下端を原点として, 上向きを正に x 座標をとる.

ここで, 質量 m の物体をばねに取りつける.



物体の運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{213}$$

ばねがのびて物体が静止したときの位置は?

ばねが a **だけのびたととすると,物体の位置は** $x = -a$. **このときに,静止している,つまり加速度が** 0 **だから,**

62

$$\tag{214}$$

さらに b **だけ引っ張って静かに離したときの運動は?**

$$\textbf{運動方程式}\quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) - mg. \tag{215}$$

$$\textbf{初期条件}\quad x(0) = -a - b, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{216}$$

単振動だから, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** (215) **の解を探してみよう** (?)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) + g = 0. \tag{217}$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t} + g = 0. \tag{218}$$

$\boxed{\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i \text{ ではない!}}$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **という形の解はない**.

うまい方法

x 座標の原点を, $x=-a$ に変更したものを考える. この座標を X とかくことにしよう: $x = X - a$.

時刻 t での物体の位置を $X(t)$ と書くと,

$$\text{運動方程式} \quad m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(X(t)-a) - mg. \tag{219}$$

$$\text{初期条件} \quad X(0)-a = -a-b, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{220}$$

すなわち,

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,k\left(X(t) - \frac{mg}{k}\right) - mg. \tag{221}$$

$$\text{整理して} \quad \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0. \tag{222}$$

$$X(0) = -\,b, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{223}$$

この $X(t)$ **について** $X(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみると**,

$$\left(\lambda^2+\frac{k}{m}\right)\mathrm{e}^{\lambda t}=0 \qquad \text{よって}\lambda=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{224}$$

よって,

$$X(t)=C_1\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+C_2\mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \tag{225}$$

は解. **初期条件より**, $C_1=C_2=-b/2$. **よって**,

$$X(t)=-\frac{b}{2}\left(\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{k}{m}}t}+\mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)=-b\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{226}$$

きょうの教訓: うまい座標系 (原点) をとるとうまくいく

もう少し堅実な人のための方法

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}x(t) + g = 0 \tag{227}$$

元凶は左辺の g. **これを**, $x(t)$ **に取り込んで**,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = 0 \tag{228}$$

として, $\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right)$ **をかたまりだと思おう**.

第 1 項 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ **は**, **このかたまりでかけてない**. **しかし**, **運良く**

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) \tag{229}$$

なので,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) + \frac{k}{m}\left(x(t) + \frac{mg}{k}\right) = 0 \tag{230}$$

とかける．そこで，

$$x(t)+\frac{mg}{k}=\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{231}$$

という解を探せばよい．あるいは

$$X(t)=x(t)+\frac{mg}{k}=x(t)+a \tag{232}$$

のように新しい変数を用いて

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{k}{m}X(t)=0 \tag{233}$$

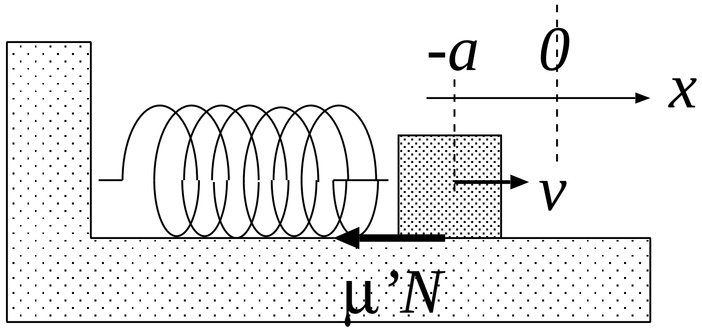
を解けばよい．

例題 19 質量 m の物体が, ばね定数 k のばねにつながれて, 水平面上に置かれている. 重力加速度を g とする.

面と物体の間の動摩擦係数を μ' とする. 面と物体の間の静止摩擦力は考えない.

ばねを自然長から $a(>0)$ だけ押し縮めて静かに手を離した. 自然長の位置を原点, 右向きに正に x 軸をとる.

ばねがのびて物体がいったん静止するまでの運動を求めよう.



63

quiz 次の微分方程式を解こう．積分定数は決定しなくてよい．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) + 8 = 0 \tag{234}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 4x(t) + 8 = 0 \tag{235}$$

12 減衰振動と過減衰

12.1 ばねと空気抵抗の復習

ばね定数 k **のばねの力** $-kx(t)$ **と**, **速度に比例する空気抵抗** $-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ **とがある場合を考えよう** $(k,\gamma>0)$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=-k\cdot x(t)-\gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{236}$$

$$\Longleftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+\gamma\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+k\cdot x(t)=0. \tag{237}$$

一般に,

$$a\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+b\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+c\cdot x(t)=0.\quad (a,b\ \text{は定数}) \tag{238}$$

というタイプの微分方程式を解くには, $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいて** λ **をきめるのだった**.

12.2 特性方程式と解の分類

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0. \quad (b, c \text{ は定数}) \tag{239}$$

という微分方程式は, a, b, c の値に応じて異なるタイプの解を持つ.

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入.

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{240}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{241}$$

これは λ をきめる 2 次方程式. ……… 64 という.

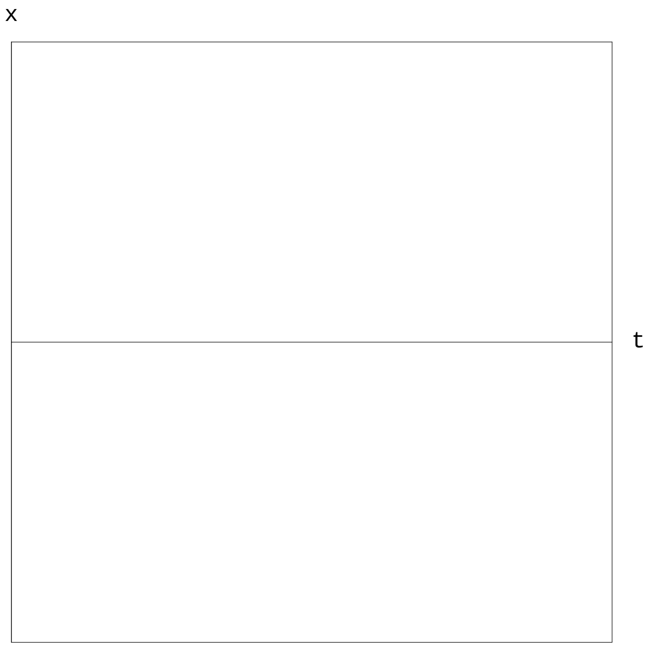
$$\boxed{65} \; D = b^2 - 4ac. \tag{242}$$

解は, D の値によって分類される.

$D>0$ のとき $D=b^2-4ac>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{mk}<\gamma.$　66

2 実根. $\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-mk}}{2}=\alpha,\beta.$

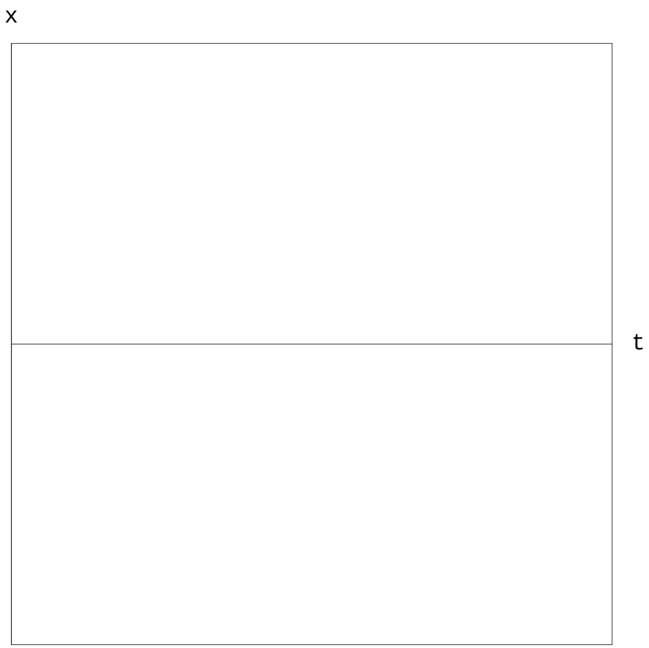
$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{\alpha t}+C_2\mathrm{e}^{\beta t}. \tag{243}$$



$D < 0$ のとき $D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \gamma < 2\sqrt{mk}$ 67

互いに複素共役な 2 複素根. $\lambda = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2} = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{mk - \gamma^2}}{2} = \mu \pm i\omega.$

$$
\begin{aligned}
x(t) =& C_1 \mathrm{e}^{(\mu + i\omega)t} + C_2 \mathrm{e}^{(\mu - i\omega)t} = \mathrm{e}^{\mu t}(C_1 \mathrm{e}^{i\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\omega t}) \\
=& \mathrm{e}^{\mu t}((C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t) \\
=& \mathrm{e}^{\mu t}(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t)
\end{aligned}
\tag{244}
$$

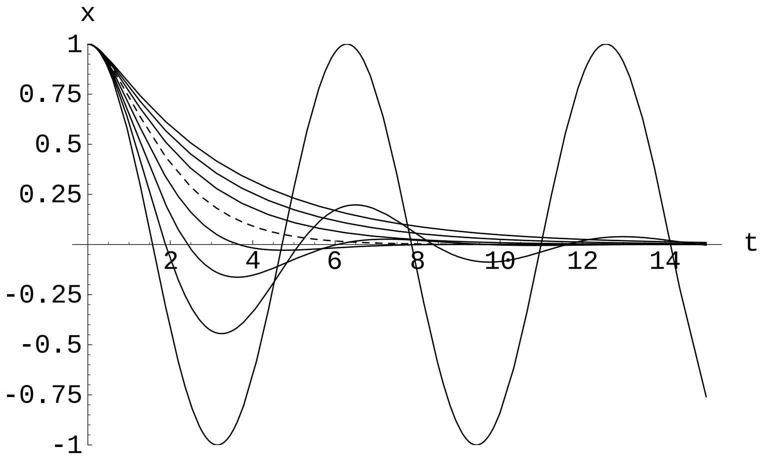


$D = 0$ のとき

重根.

過減衰と減衰振動の境い目.

来年数理モデル基礎 I でやります. 臨界制動といいます.



単振動 $\iff \gamma = 0 \iff D = -mk < 0.$

減衰振動の中の特別な場合 (減衰しない場合)

quiz

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + c \cdot x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 2. \tag{245}$$

を考える.

1. $c = 5$ のとき, 解のグラフを描こう.
2. 過減衰となる c の範囲を求めよう.

先週の quiz の略解

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) + 8 = 0 \tag{246}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t) + 2) + 4(x(t) + 2) = 0 \tag{247}$$

なので, $X(t) = x(t) + 2$ **とおくと**,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4X(t) = 0 \tag{248}$$

これを解くと,

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{2it} + C_2 \mathrm{e}^{-2it}. \tag{249}$$

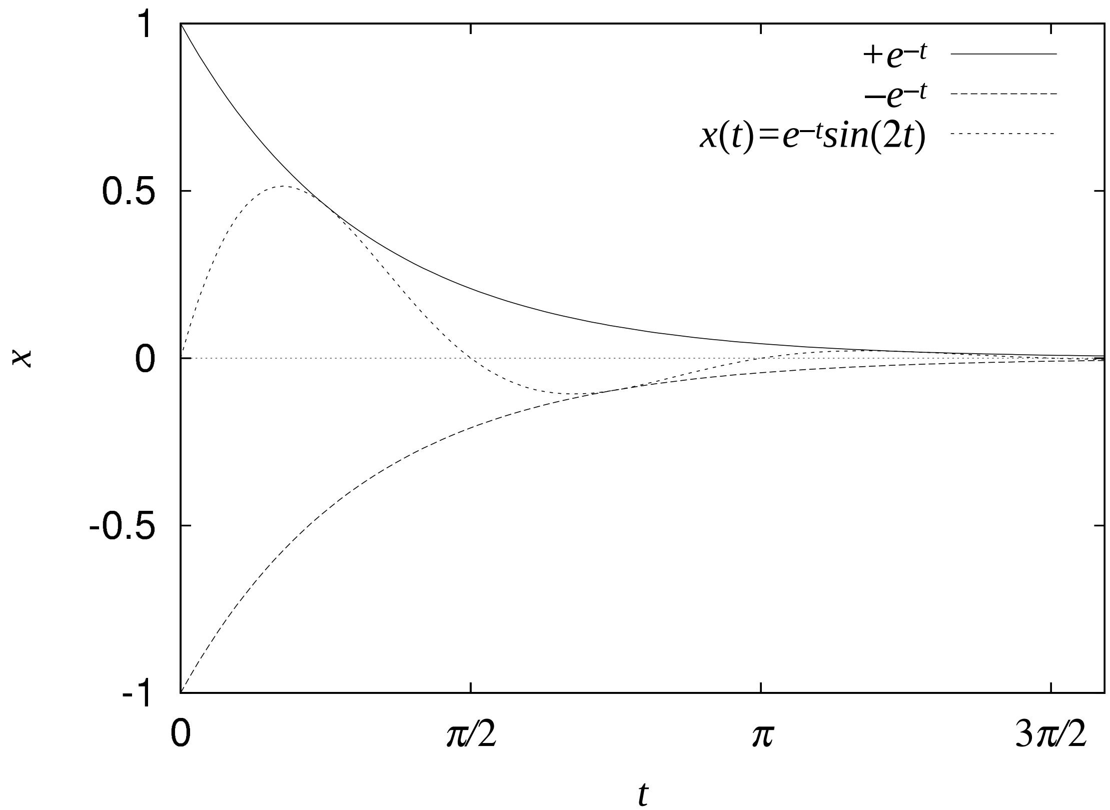
よって,

$$x(t) = X(t) - 2 = C_1 \mathrm{e}^{2it} + C_2 \mathrm{e}^{-2it} - 2. \tag{250}$$

$x(t) = D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t) - 2$ **も可**.

先週の quiz の略解

1. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみるなどして解くと, $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$. これは減衰振動.



2. 過減衰となるのは, 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + c = 0$ の判別式 $D = 2^2 - 4c > 0$ となるとき. よって, $c < 1$.

13 エネルギー保存則と位置エネルギー

13.1 エネルギー保存の例

例題 20 ばねの運動を表わす運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) \tag{251}$$

の, 初期条件

$$x(0) = A, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}B \tag{252}$$

のもとでの解を考える.

このとき, 量

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + 12k\cdot(x(t))^2 \tag{253}$$

を求めよう.

68

13.2 力学的エネルギーの保存 (1 次元)

位置 x だけで決まる力 $F(x)$ を受けて 1 次元の運動をする, 質量 m の質点を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{254}$$

あてはまる例 **バネの力.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{255}$$

そうでない例 **空気抵抗を受けるバネ. 力 F は, x と v の関数.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{256}$$

(254) で $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t)). \tag{257}$$

誰かが思いついた超絶技巧. 両辺に $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{258}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = \int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{259}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 左辺} = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2 + C_1. \tag{260}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 右辺} = \int F(x)\mathrm{d}x. \tag{261}$$

関数 $U(x)$ を, 力 $F(x)$ から

$$\boxed{U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x'} \tag{262}$$

で定義する

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + U(0) + C_2. \tag{263}$$

すなわち　$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) = E.(\text{一定}) \tag{264}$$

第 1 項 $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ を質点の [69] という.

(262) で定義される第 2 項 $U(x)$ を質点の [70], または [71] という.

両者の和 E を, 力学的エネルギー という.

式 (264) は, 力 $F(x)$ のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー E は一定で変化しないことをいっている. これを,

　　力学的エネルギーは $\boxed{72\qquad\qquad}$, 力学的エネルギーは $\boxed{73\qquad\qquad}$ である, 力学的エネルギーは不変である

などという.

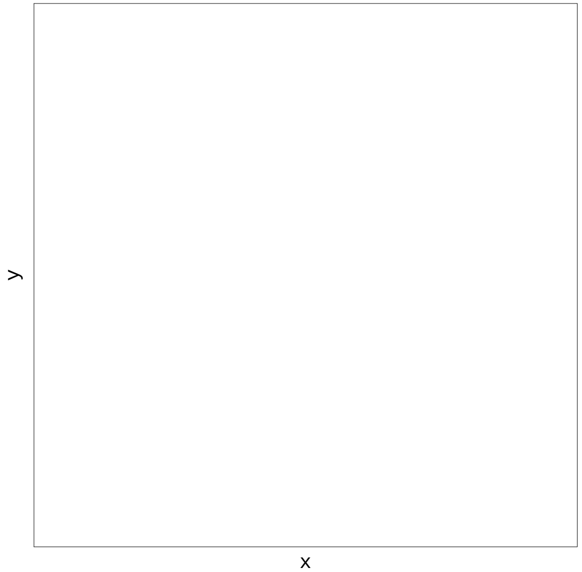
一般に, 力 F が, ある関数 U を用いて,

$$\boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)} \qquad (265)$$

と書けるとき, そのような力は 保存的 であるといい, 関数 $U(x)$ のことをポテンシャルまたは位置エネルギーと呼ぶ.

$$U(x) \quad \underset{-\int \mathrm{d}x}{\overset{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\rightleftarrows}} \quad F(x)$$

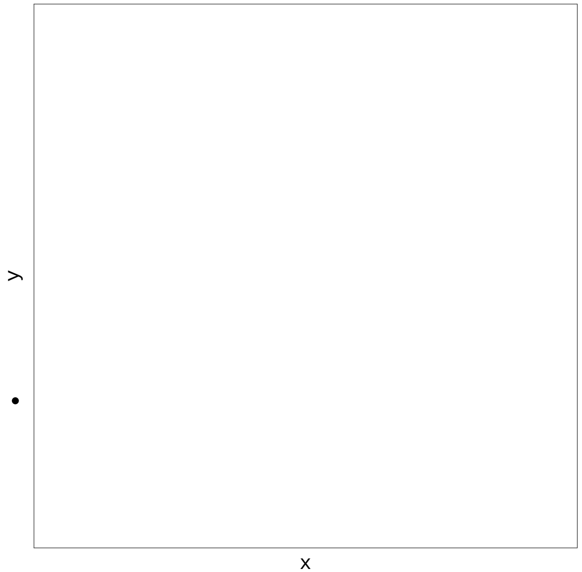
例 **重力のもとでの鉛直方向の運動**. **高さを** x **とかく**. $F(x) = -mg$.



$$U(x) = -\int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = -\int_0^x -mg\,\mathrm{d}x' = mgx.$$

保存則　$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgx(t) = E(\textbf{一定}).$$

例 **バネの力のもとでの運動**. **自然長からの変位を** x. $F(x) = -kx$.



$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2.$$

保存則　$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = E(\textbf{一定}).$$

例題 21　*1.* **ポテンシャルが** $U(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ **であるとき**, **質点が受ける力** $F(x)$ **を求めよう**.

2. **重力のもとで** (**重力加速度** g), **質量** m **の質点を**, **地表から速度** v_0 **で鉛直上向きに打ち出した**. **最高点の** (**地表から測った**) **高さを**, **力学的エネルギー保存則を用いて求めよう**.

74

75

quiz 1

1. 1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x)$ を求めよう.

2. 重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 高さ h_0 の点から静かに落下させせた. 高さ h_1 の点まで落下したときの速さを力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

$U(x)$ には，定数の不定性がある

$U(x)$ の定義 (262) では，下端を $x=0$ としたが，任意の $x=x_0$ としてよい．このとき，$U(x)$ は定数だけ変化する．

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{new}}(x) &= -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \\ &= -\int_{0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' - \int_{x_0}^{0} F(x')\mathrm{d}x' \\ &= U(x) + (\text{定数}) \end{aligned} \tag{266}$$

つまり $U(x)+C$ が位置エネルギーと思ってもよい．

どうせ微分して力 $F(x)$ を求めたら変わんないしー．

13.3 興味と暇がある人のための注 1

(264) を $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ について解いた

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \tag{267}$$

を積分することによっても $x(t)$ が求められる．落下運動の場合:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - mgx)} \tag{268}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{E}{mg} - x}} = \sqrt{2g}\mathrm{d}t \tag{269}$$

$$-2\sqrt{\frac{E}{mg} - x} = \sqrt{2g}t + C \tag{270}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{271}$$

13.4 興味と暇がある人のための注 2

3 次元での力とポテンシャルとの関係 (応用ベクトル解析)

$$\vec{F}(x,y,z) = (-\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z), -\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z), -\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)). \qquad (272)$$

2 次元以上では, 保存的でない力のほうが普通.

冬のプチテストの結果について

答案の裏に書いてある数字は 120 点満点での点数 x です.

ファイナルトライアル

2003/01/31(金)3 講時. 1-107.

科目の成績は 100 点= quiz 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50.

ただし, 上の式に関わらず, 秋のプチテスト, 冬のプチテスト, 毎回の quiz から計算される点数がすべて 1 点以上である人は, ファイナルトライアルが 50 点中 35 点以上であれば無条件に合格とします.

試験範囲は, 次回にある程度詳しく説明しますが, 基本的には授業で説明した部分すべてです.

quiz 1 の略解

1. $U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \int_0^x (x' + x'^3)\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4.$

2. 重力の位置エネルギーは $U(x) = -\int_0^x -mg\mathrm{d}x' = mgx$ なので, 速度を $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とすると, 力学的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgx(t) = E \qquad (\text{一定}). \tag{273}$$

落下し始めた瞬間には, 速さは 0 なので,

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgh_0 = E. \tag{274}$$

$x = h_1$ を通過する瞬間には, 速度を v_1 とすると,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = E. \tag{275}$$

この 2 つの式から, 速さ $|v_1|$ を m, g, h_0, h_1 で表わすと,
$|v_1| = \sqrt{2g(h_0 - h_1)}$.

quiz0 ばね定数 k のばねに取りつけられた, 質量 m の質点を考える. 自然長の位置を原点として, 時刻 t における位置を $x(t)$ とする.

$$x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = V \tag{276}$$

である場合, ばねののびの最大値を力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

$U(x)$ は‘仕事’

質点が, 一定の力 F をうけて, x_0 から x_1 まで動いたとする. このとき,

$$\boxed{W = F \times (x_1 - x_0) = F \times \Delta x} \tag{277}$$

を, 力 F のした 仕事 という.
力の向きと移動方向が同じなら $W > 0$, 逆なら $W < 0$.

力の向き	移動方向	仕事
$\rightarrow (+)$	$\rightarrow (+)$	$(+)$
$\rightarrow (+)$	$\leftarrow (-)$	$(-)$
$\leftarrow (-)$	$\rightarrow (+)$	$(-)$
$\leftarrow (+)$	$\leftarrow (-)$	$(+)$

W が大きいほど, 力 (出してる人) は仕事が多くてたいへん, という感じ.
力が x の関数 $F(x)$ である場合には

$$W = \sum_i F(x_i)\Delta x \rightsquigarrow W = \int_{x_0}^{x_1} F(x')\mathrm{d}x' \tag{278}$$

となる.

位置エネルギー

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' \tag{279}$$

との関係は,

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x')\mathrm{d}x' = U(x_0) - U(x_1). \tag{280}$$

つまり, x_0 から x_1 まで動く間に仕事を W だけすると, 位置エネルギーは W 減少する. 逆に言うと, x にある質点には $U(x)$ だけの仕事をする能力がある.

13.5 位置エネルギーを用いた運動の解析

力学的エネルギー E を持つ物体の運動は,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x) = E. \tag{281}$$

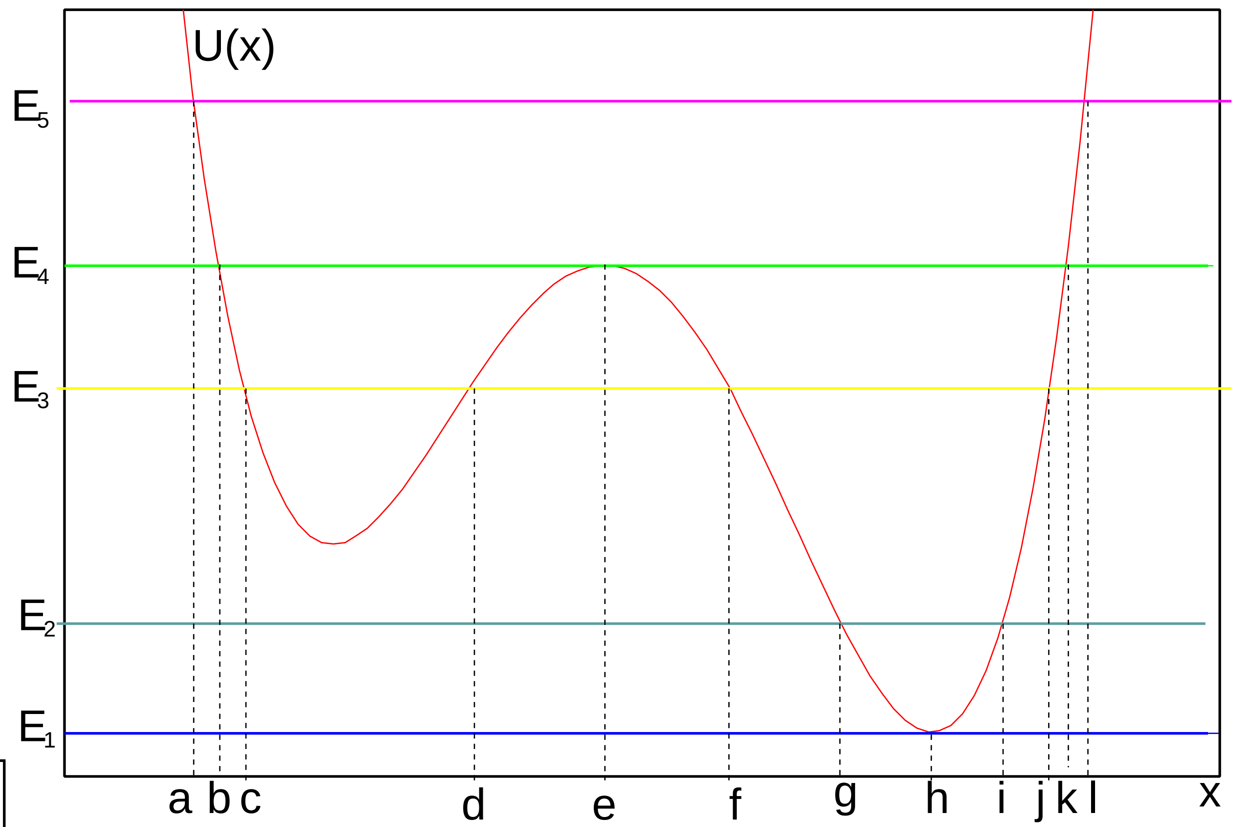
を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E - U(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 \geq 0. \tag{282}$$

- 質点は, $E - U(x) \geq 0$ であるような x にしか移動できない.
- $E - U(x) = 0$ であるような x では, 速度が 0 になる.

また, 力は $U(x)$ の傾きの (-1) 倍.

これらの性質を用いて, 質点の運動の様子を理解できる.



例

$E = E_1$ **のとき**, $x = h$ **で静止**.

$E = E_3$ **のとき**, $c \le x \le d$ **を往復**. **または**, $f \le x \le j$ **を往復**

$E = E_4$ **のとき**, $x = e$ **で静止**. **または**, $b \le x < e$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. **または**, $e < x \le k$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. $(t \to \infty)$

quiz1 $E = E_2, E_5$ **のときの運動を**, **上の例ののりで説明しよう**.

13.6 平衡点と微小振動

位置エネルギーが $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ **となっているような点を** **平衡点** **という.**
(上の例の $x = e, h$**) 平衡点では力が働かないので, 静かに平衡点に置かれた質点は, ずっと平衡点上にいる.**

平衡点 $x = h$ **から, わずかにずれた点に置かれた場合を考えよう.** $x = h$ **の近くを考えるので,** $U(x)$ **を** $x = h$ **のまわりにテイラー展開して考えてもよい.**

$$\begin{aligned} U(x) =& U(x_0) + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \cdots \\ =& U(x_0) + 0 + \frac{1}{2}k \cdot (x - x_0)^2. \end{aligned} \tag{283}$$

これはばねについた質点の位置エネルギーと (定数プラスと, 原点ずらしを除いて) 同じ!

ただし, $(x - x_0)^3$ **以降は小さいので無視し,** $k = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ **とおいた.**

これは,

> 平衡点 x_0 の近くでは, 質点は, 近似的に,
> $x = x_0$ を中心とする, ばね定数 $k = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ の単振動をする

ことを意味している.

このことは, 質点の運動方程式が, 近似的に

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right) = -k \cdot (x - x_0) \qquad (284)$$

となることからもわかる.

ただし, これは, $k = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$ の場合 (例 $x = h$. 安定な平衡点).

一方, $k = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$ である平衡点から少しずらすと, どんどん離れていってしまう (例. $x = e$. 不安定な平衡点).

例題 22 **位置エネルギー** $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ **のもとで，質量** m **の質点が運動している．平衡点を求めよう．安定な平衡点については，その周りの微小振動の周期を求めよう．**

76

14 等速円運動と単振動

14.1 等速円運動

(x, y) 平面で運動する質量 m の質点を考える.

時刻 t における質点の座標が

$$(x(t), y(t)) = (A\cos\omega t, A\sin\omega t) \tag{285}$$

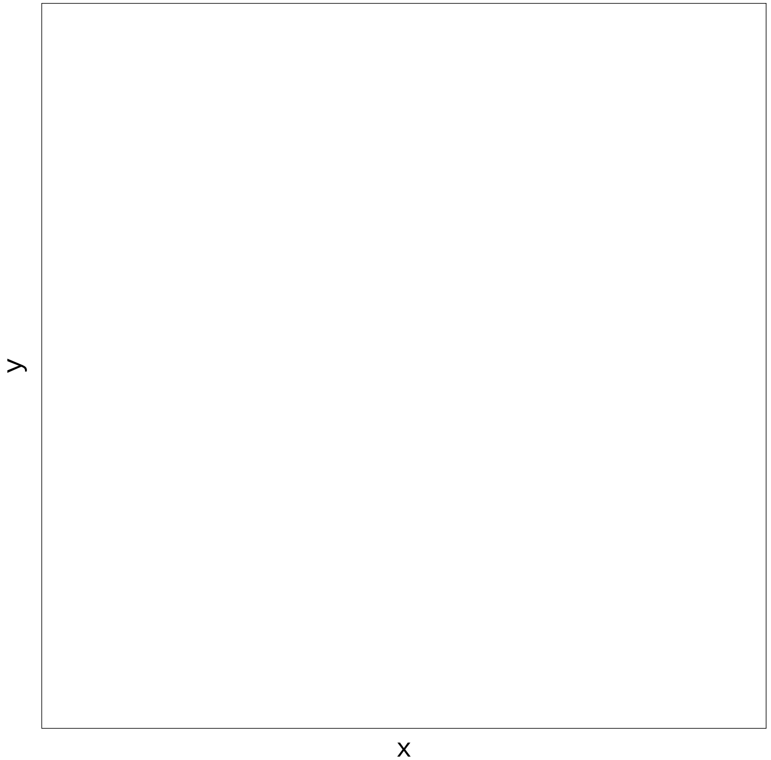
であるような運動を, 原点を中心とする等速円運動という $(A > 0, \omega > 0$ は定数$)$

A は円運動の半径, ω は円運動の角速度. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ は円運動の周期.

等速円運動をする質点はどのような力を受けているか?

2 次元の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \tag{286}$$



あるいは成分で表示して,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \tag{287}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y \tag{288}$$

で, (285) を左辺に代入して,

$$F_x = m \times (-\omega^2 A\cos\omega t) = -m\omega^2 x(t) \tag{289}$$

$$F_y = m \times (-\omega^2 A\sin\omega t) = -m\omega^2 y(t) \tag{290}$$

あるいは

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}(t). \tag{291}$$

$$|\vec{F}| = m\omega^2 |\vec{r}(t)| = m\omega^2 A. \tag{292}$$

つまり, 向きが原点向き, 大きさが $m\omega^2|\vec{r}|$ の力 (向心力 という) がはたらいているときに円運動となる ($|\vec{r}|$ は原点からの距離).

14.2 遠心力

ニュートンの運動方程式は $\boxed{\text{慣性系}}$ で見たときに成立するのだった.

実際, 等速円運動している人の立場で (例. メリーゴーラウンドに乗ってる人. 自転する地球に乗ってる人) の立場に立って考えると, 力 $\vec{F}$ があるのに静止している (加速度が零である) ことになり, 運動方程式は成立しない.

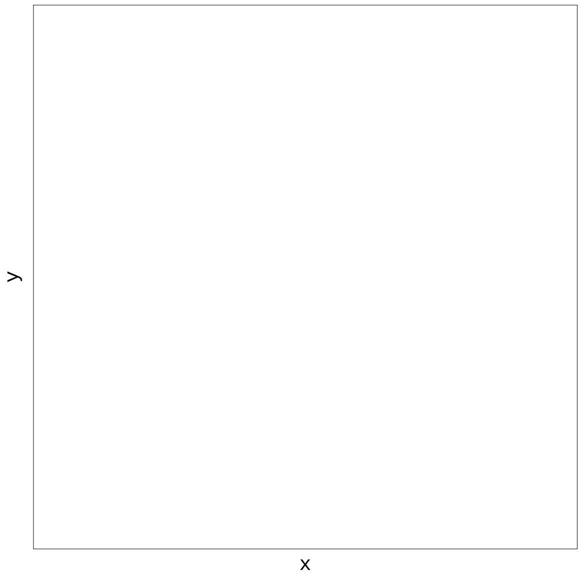
しかし, どうしても等速円運動している人の立場で運動方程式を立てたいときは, $\boxed{\text{遠心力}}$ $-\vec{F} = m\omega^2\vec{r}$ が働いていて, 向心力 $\vec{F}$ とつりあっていて, 加速度が零になっている, と考える.

遠心力は, 観測者が等速円運動していることを表わすために導入された仮想的な力である.

14.3 単振動と等速円運動

ばねの力を 2 次元にした力

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \tag{293}$$



成分で書くと,

$$F_x = -\,kx \tag{294}$$

$$F_y = -\,ky \tag{295}$$

のもとで運動する, 質量 m の質点を考える.

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,kx(t), \tag{296}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,ky(t) \tag{297}$$

の解を, **初期条件**

$$x(0) = A, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0, y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{k/m}A \tag{298}$$

のもとで求めよう. $x(t), y(t)$ **は別々に求められて**, $\omega = \sqrt{k/m}$ **とすると**,

$$x(t) = A\cos\omega t, \tag{299}$$

$$y(t) = A\sin\omega t \tag{300}$$

となる. **つまり**, x, y **座標の一方をみると単振動だが**, (x, y) **としてみると** $\boxed{\textbf{等速円運動}}$ **である**. **実際**, $\boxed{t\ \textbf{を消去して軌跡を求める}}$ **と**,
$x(t)^2 + y(t)^2 = A^2$ **となる**.

- 2 **次元の力** $\vec{F} = -k\vec{r}$ **のもとでは等速円運動が起きることがある**
- **等速円運動する質点の** x **座標** (**あるいは** y **座標**) **だけをみると単振動になっている**.

ファイナルトライアル

2003/01/31(金)3 講時. 1-107. 座席指定します.

科目の成績は 100 点= quiz 10 + 秋のプチテスト 15 + 冬のプチテスト 25 + ファイナルトライアル 50.

ただし, 上の式に関わらず, 秋のプチテスト, 冬のプチテスト, 毎回の quiz から計算される点数がすべて 1 点以上である人は, ファイナルトライアルが 50 点中 35 点以上であれば無条件に合格とします.

試験範囲は基本的にすべてですが,

- 放物運動, 動摩擦力, 静摩擦力については出題しません.
- エネルギー保存則について出題します.
- 単振動/減衰振動/過減衰について出題します.
- 変数分離型微分方程式, $a\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+cx(t)=d$ 型微分方程式について出題します.

13.7 平衡点と微小振動

すみません. [redacted] 部分を訂正します.

位置エネルギーが $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0)=0$ となっているような点を **平衡点** という. (上の例の $x=e,h$) 平衡点では力が働かないので, 静かに平衡点に置かれた質点は, ずっと平衡点上にいる.

平衡点 $x=h$ から, わずかにずれた点に置かれた場合を考えよう. $x=h$ の近くを考えるので, $U(x)$ を $x=h$ のまわりにテイラー展開して考えてもよい.

$$
\begin{aligned}
U(x) =& U(x_0) + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \cdots \\
=& U(x_0) + 0 + \frac{1}{2}k\cdot(x-x_0)^2.
\end{aligned} \tag{313}
$$

これはばねについた質点の位置エネルギーと (定数プラスと, 原点ずらしを除いて) 同じ!

ただし, $(x-x_0)^3$ 以降は小さいので無視し, $k=$ [redacted] $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ とおいた.

これは,

> 平衡点 x_0 の近くでは, 質点は, 近似的に,
> $x = x_0$ を中心とする, ばね定数 $k =$ [redacted] $\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ の単振動をする

ことを意味している.

このことは, 質点の運動方程式が, 近似的に

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2\right) = -k\cdot(x-x_0) \qquad (314)$$

となることからもわかる.

ただし, これは, $k =$ [redacted] $\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$ の場合 (例 $x = h$. 安定な平衡点).

一方, $k =$ [redacted] $\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x_0) < 0$ である平衡点から少しずらすと, どんどん離れていってしまう (例. $x = e$. 不安定な平衡点).

例題 23 位置エネルギー $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ のもとで，質量 m の質点が運動している．平衡点を求めよう．安定な平衡点については，その周りの微小振動の周期を求めよう．

力は $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) = x - x^3 = x(1-x)(1+x)$. **よって，平衡点は** $x = 0, \pm 1$. **各点で，** $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x) = -1 + 3x^2$ **なので，**
$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(\pm 1) = +2$, $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(0) = -1$

$x = +1$ **について考える．** $x = +1$ **のまわりで** $U(x)$ **をテイラー展開を** 2 **次まで求めると，**

$$
\begin{aligned}
U(x) =& U(1) + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x) \cdot (x-1) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x) \cdot (x-1)^2 + \cdots \\
=& -\frac{1}{4} + (x-1)^2 + \cdots .
\end{aligned}
\tag{315}
$$

となる．

(315) **をばねの位置エネルギー** $U_0(x) = \frac{1}{2}kx^2$ **と比べると，** $k = 2$ **となる**

ので, 運動は,

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{2}{m}}t\right) + 1 \tag{316}$$

となる.

このことは, (315) から力 $F(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{1}{4} + (x-1)^2) = -2(x-1)$ を求めて運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}(t) = -2(x(t)-1) \tag{317}$$

を解いてもわかる.

$\sin, \cos$ の周期が 2π であることに注意すると, 微小振動の周期は $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2/m}} = \sqrt{2m}\pi$.

quiz0

質点の位置エネルギー $U(x)$ を求める．ばねの力は $F(x) = -kx$ だから，

$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2. \tag{318}$$

エネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = E \quad (\text{定数}). \tag{319}$$

(319) を $t = 0$ について書くと，

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k0^2 = E. \tag{320}$$

(319) を，のびが最大になった時刻について書く．求める，最大ののびを $X > 0$ とする．この時刻には，速度は 0 になっているはず (最大値では

微分は 0) だから,

$$\frac{1}{2}m0^2 + \frac{1}{2}kX^2 = E. \tag{321}$$

(320),(321) から (E を消去して) X を求めると,

$$X = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot V \tag{322}$$

quiz1

$E - U(x) \geq 0$ となる領域を考えればよい.

$E = E_2$ のとき, $g \leq x \leq i$ を往復.

$E = E_5$ のとき, $a \leq x \leq l$ を往復. (ただし, $x = e$ あたりではいったん減速する.)

宣伝

3 回生の数理情報演習

`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/juniors/`

でやってる i-アプリを作ろうプロジェクトの一環として, 物理数学 II で出てくる運動のアニメの i-アプリを作り始めました. よかったら見て行ってね.

`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/i/`