物理数学 II[1]秋のプチテスト

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 11 月 15 日樋口さぶろお[2]

注意

1. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
3. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
   (a) 1-508 前引き出しで答案を返却する (第三者が点数を見る可能性がある).
   (b) 答案を廃棄し, 返却も公開もしない.

1

次の微分方程式を解こう. 初期条件から積分定数を決定しよう.

(1) $a\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = -1, \qquad$ (a は 0 でない定数)

(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 3x(t) + 1 = 0, \quad x(0) = 1.$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 4x(t) + x(t)^2, \quad x(0) = 2.$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\dfrac{\sqrt{x(t)}}{t^3}, \quad x(1) = 4.$

2

重力 (重力加速度の大きさ g) と空気抵抗の力とを受けて, 鉛直方向にだけ運動する質量 m の物体がある. z 座標を鉛直方向にとり, **鉛直下向きを z 軸の正の向きとする**. 空気抵抗の力 F の向きは物体の速度の反対向きである. 力 F の大きさは物体の速さに比例し, 比例定数は $\beta(>0)$ である. 時刻 t の物体の位置を $z(t)$ として運動方程式を書こう. (運動方程式を書いた後に, それを解いて $z(t)$ を求めることはしなくてよい)

3

1 次元を運動する質量 $m = 1$ の物体の, 時刻 t の位置を $x(t)$ とする. この物体は, 時刻 t には力 $F = t + \mathrm{e}^{-t}$ を受ける. 時刻 $t = 0$ の瞬間に原点にあった物体が, 時刻 $t = 1$ の瞬間には静止していた.

1. 物体の運動方程式を書こう.
2. 初期条件をすべて書こう.
3. 時刻 $t = 1$ における位置 $x(1)$ を求めよう.

---

[1] `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/`

[2] `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

物理数学II[3]秋のプチテスト略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 11 月 15 日樋口さぶろお[4]

これは略解です. 過程は省略しているところがあります.

1

以下に出てくる C は積分定数. これを代入した後の答えがあっていればよい.

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-t/a}, \quad C = -1. \tag{1}$$

$$x(t) = -\tfrac{1}{3} + C\mathrm{e}^{-3t}, \quad C = \tfrac{4}{3}. \tag{2}$$

$$x(t) = \frac{4}{C\mathrm{e}^{-4t} - 1}, \quad C = 3. \tag{3}$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{4t^2} + C\right)^2, \quad C = \tfrac{7}{4}. \tag{4}$$

2

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = +mg - \beta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t). \tag{5}$$

3

1.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = t + \mathrm{e}^{-t}. \tag{6}$$

2.

$$x(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(1) = 0. \tag{7}$$

3. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと, (6) より,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = t + \mathrm{e}^{-t} \tag{8}$$

$$\int \mathrm{d}v = \int (t + \mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = v(t) = \tfrac{1}{2}t^2 - \mathrm{e}^{-t} + C_1 \tag{10}$$

$$\int \mathrm{d}x = \int \left(\tfrac{1}{2}t^2 - \mathrm{e}^{-t} + C_1\right)\mathrm{d}t \tag{11}$$

$$x(t) = \tfrac{1}{6}t^3 + \mathrm{e}^{-t} + C_1 t + C_2 \tag{12}$$

ここで, C_1, C_2 は積分定数. 初期条件より,

$$0 = x(0) = 1 + C_2, \tag{13}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(1) = \tfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-1} + C_1. \tag{14}$$

これを解いて C_1, C_2 を求めて, 時刻 t での位置は

$$x(t) = \tfrac{1}{6}t^3 + \mathrm{e}^{-t} + (\mathrm{e}^{-1} - \tfrac{1}{2})t - 1. \tag{15}$$

時刻 $t = 1$ での位置は

$$\begin{aligned} x(1) &= \tfrac{1}{6} + \mathrm{e}^{-1} + (\mathrm{e}^{-1} - \tfrac{1}{2}) - 1 \\ &= -\tfrac{4}{3} + 2\mathrm{e}^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

---

[3] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[4] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501