物理数学II[1]冬のプチテスト

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 12 月 20 日樋口さぶろお[2]

注意

1. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
3. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
   (a) 1-508 前引き出しで答案を返却する (第三者が点数を見る可能性がある).
   (b) 答案を廃棄し, 返却も公開もしない.

1

次の微分方程式を, 初期条件のもとで解いて, $x(t)$ を求めよう. 最後の答えは, 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含まない形に整理しよう.

$$\text{(1)} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 6 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 13 \cdot x(t) = 0, \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -6.$$

$$\text{(2)} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - x(t) - 1 = 0, \quad x(0) = 0.$$

2

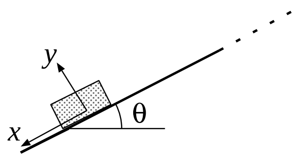
複素数 $z_1 = \mathrm{e}^{1-\frac{\pi}{3}i}, z_2 = 1 - i$ を考える. ただし, i は虚数単位.

1. z_1 の実部, 虚部を求めよう.
2. $|z_2|$ と $\arg z_2$ を求めよう.
3. $(z_2)^{-10}$ の実部, 虚部を求めよう.
4. $z_1 \times z_2$ の絶対値と偏角を求めよう.

3

傾きの角 $\theta > 0$ の, 十分に長い斜面がある. 質量 m の 物体に, 重力 (重力加速度の大きさ g), 垂直抗力 (大きさ N), 静止摩擦力 (静止摩擦係数 μ), 動摩擦力 (動摩擦係数 μ') がはたらく.

大きさ V の初速度で, 時刻 $t = 0$ に斜面の上向きに物体を発射したところ, しばらく上向きに運動した後, いったん静止した.



1. 図のように x, y 座標軸をとる. 物体が斜面の上向きに動いている間について, x 方向, y 方向の運動方程式を書こう.
2. 運動方程式を解き, 初期条件を考慮して, いったん静止するまでの物体の運動を求めよう. いったん静止するまでに移動する距離を求めよう.
3. 物体は, いったん静止した後, ふたたび下向きに動き始めた. このことからわかる, 角度 θ に関する不等式をかこう (等号を含むかどうかは気にしなくてよい).

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

物理数学II[3]冬のプチテスト略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 12 月 20 日樋口さぶろお[4]

答案の返却は 2002/12/27(金) から開始します.

1

1. まず $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)+6\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+13\cdot x(t)=0$ の解を, $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ : 定数) の形から探す. 代入して,

$$(\lambda^2+6\lambda+13)\mathrm{e}^{\lambda t}=0 \tag{1}$$

$\mathrm{e}^{\lambda t}(\neq 0)$ で割って, 解の公式より, $\lambda=-3\pm 2i$. よって, C_1, C_2 を任意定数としたとき,

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{(-3+2i)t}+C_2\mathrm{e}^{(-3-2i)t} \tag{2}$$

は解. 初期条件

$$\begin{aligned} 2 &= C_1+C_2 && (3)\\ -6 &= (-3+2i)C_1+(-3-2i)C_2 && (4) \end{aligned}$$

から C_1, C_2 を決めると, $C_1=1, C_2=1$. 整理して,

$$x(t)=2\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t). \tag{5}$$

2. $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ は定数) を代入して解を探すと,

$$(\lambda-1)\mathrm{e}^{\lambda t}-1=0 \tag{6}$$

となり, これを満たす定数 λ は存在しない. したがって, $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}$ という形の解はない.
そこで, 微分方程式を

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=x(t)+1 \tag{7}$$

とかくと, これは変数分離形であることがわかる. よって,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} &= \mathrm{d}t && (8)\\ \log|x+1| &= t+C && (9)\\ x+1 &= \mathrm{e}^{t+C} && (10) \end{aligned}$$

となり, 初期条件から C を決めて,

$$x(t)=\mathrm{e}^{t}-1. \tag{11}$$

2

1.

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{e}^1\times\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}i}\\ &= \mathrm{e}\cdot(\cos(-\tfrac{\pi}{3})+i\sin(-\tfrac{\pi}{3}))\\ &= \frac{\mathrm{e}}{2}-\frac{\sqrt{3}\mathrm{e}}{2}i. \end{aligned} \tag{12}$$

よって, $\mathrm{Re}z_1=\frac{\mathrm{e}}{2}, \mathrm{Im}z_1=-\frac{\sqrt{3}\mathrm{e}}{2}$.

2.

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(+1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}. && (13)\\ \arg z_2 &= -\frac{1}{4}\pi. && (14) \end{aligned}$$

$\arg z_2=\frac{7}{4}\pi$ も可.

3.

$$\begin{aligned} (z_2)^{-10} &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)^{-10}=\frac{1}{2^5}\mathrm{e}^{\frac{10}{4}\pi i}\\ &= \frac{1}{32}\cdot\mathrm{e}^{+2\pi i}\cdot\mathrm{e}^{\frac{2}{4}\pi i}=\frac{i}{32}. \end{aligned} \tag{15}$$

$\mathrm{Re}((z_2)^{-10})=0, \mathrm{Im}((z_2)^{-10})=\frac{1}{32}$.

4.

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}i}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i}\\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\pi i}. \end{aligned} \tag{16}$$

$|z_1\times z_2|=\sqrt{2}\mathrm{e}, \arg(z_1\times z_2)=-\frac{7}{12}\pi$. $\arg(z_1\times z_2)=+\frac{17}{12}\pi$ も可.

---

[3] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath2/

[4] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3

1.

(17) $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = +\,mg\sin\theta + \mu' N.$

(18) $m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\,mg\cos\theta + N.$

2. $y(t)=0$ より, 垂直抗力は $N = mg\cos\theta$ と求まる. よって,

(19) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = +g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)$

2 回積分して (C_1, C_2 は積分定数)

(20) $x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)t^2 + C_1 t + C_2.$

初期条件から $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -V$ より, $C_1 = -V$. よって,

(21) $x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)t^2 - Vt + C_2.$

いったん静止した時刻 $t=T$ は, 条件

(22) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$

から求まり,

(23) $T = \dfrac{V}{g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)}.$

移動した距離は,

(24) $|x(T) - x(0)| = \dfrac{V^2}{2g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)}.$

3. いったん静止した後, 物体には, 静止摩擦力, 重力, 垂直抗力がはたらく. ふたたび動き始めたということは, 最大静止摩擦力の大きさ $\mu N = \mu mg\cos\theta$ よりも, 重力の x 成分の大きさ $mg\sin\theta$ が大きいということだから,

(25) $\mu mg\cos\theta < mg\sin\theta$ 　すなわち　$\tan\theta > \mu.$ 　すなわち　$\theta > \arctan\mu.$