2.3 先週の quiz

1. 全部には返事できなくてすみません.
   - すべてのテストはすべて持込不可です．去年の問題は Web に置いてあります．テストの問題は, 暗記だけでは答えられないことを最重要視して作っています.
   - 黒板はなるべく照明をつけます.
2. $x(t) = \cos(t)$.
3. $a(t) = -4\cos(4t), x(t) = \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{3}{4}$.

3　3次元の運動方程式と運動

佐本 2.3

時刻 t **での位置** $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. **力** $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, **質量** m.
ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}, \quad \text{成分で書くと} \begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_x, \\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_y, \\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = F_z. \end{cases} \tag{20}$$

3.1 力の働かないときの 3 次元の運動 (第 1 法則)

$$
\textbf{力が働かない} \Leftrightarrow \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0,0,0) \leadsto \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0. \end{cases} \tag{21}
$$

$x(t)$ **は**, **先週の方法で求められる**.

11

y, z 成分も同様.

$$\begin{cases} x(t) = v_{x0} \times t + x_0, \\ y(t) = v_{y0} \times t + y_0, \\ z(t) = v_{z0} \times t + z_0, \end{cases} \quad \text{別の書き方} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

または

$$\boxed{12 \qquad\qquad\qquad} \tag{25}$$

等速直線運動! $\cdots$ 第 1 法則の結論

$v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$ は積分定数.

$\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ は $\boxed{13 \qquad\qquad\qquad}$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ は $\boxed{14 \qquad\qquad\qquad}$

3.2 別の運動

例題 4 質量 $m = 1$ の物体が，3 次元空間を運動している．時刻 t の位置を，$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とかく．物体は，力 $\vec{F} = (-\cos t, -\sin t, 1/100)$ を受けている．時刻 $t = 0$ には，$\vec{r}(0) = (1, 0, 0), \vec{v}(0) = (0, 1, 0)$ だったとする．物体の運動を求めよ．

15

16

3.3 放物運動

佐本 2.2,2.4

鉛直方向に z 軸, 水平面内に x, y 軸をとる. 地表の高さを $z = 0$ とする.

地表近くの, 質量 m の物体には,
大きさ mg, 鉛直下向きの 重力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg)$ が働く.

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$: 重力加速度.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = v_{x0}t + x_0, \\ y(t) = v_{y0}t + y_0, \\ z(t) = \boxed{17} . \end{cases} \tag{26}$$

積分定数 $v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}, x_0, y_0, z_0$. 2 階 $\times$ 3 次元 $= 6$ 個.

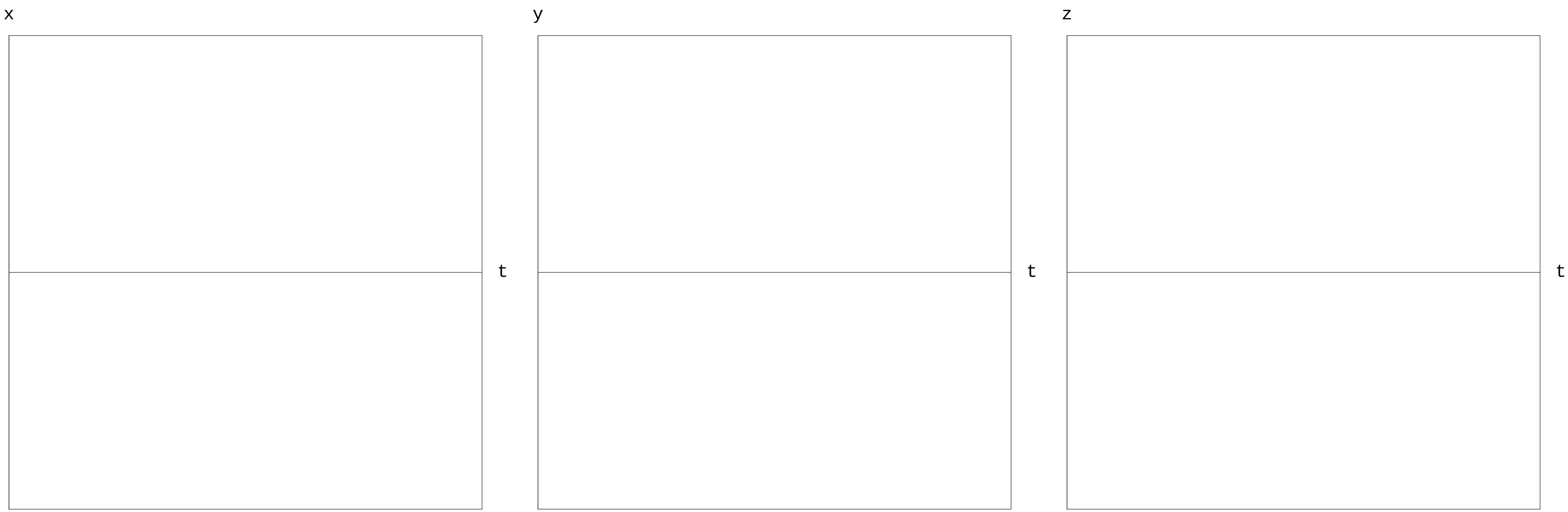
簡単のために, $x_0 = y_0 = z_0 = 0, v_{y0} = 0$ としよう. こうしても一般性を失わない. (平行移動と回転でこうできる)

$$y(t) = 0, \tag{27}$$

$$x(t) = v_{x0} t, \tag{28}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{z0} t. \tag{29}$$

運動の様子



最高点 高さ $z(t)$ が最大となるのは, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ のとき．その時刻 $t = T_1$ は, $-gT_1 + v_{z0} = 0 \rightsquigarrow T_1 = v_{z0}/g$.

その時刻での位置 (最高点の位置) は, $\boxed{\;18\;}$.

到達距離 出発点の高さ $z(0) = 0$ と同じ高さ $z(t) = 0$ に再びなる時刻 $t = T_2$ は, $-\frac{1}{2}gT_2^2 + v_{z0}T_2 = 0 \rightsquigarrow T_2 = 2v_{z0}/g$.

地表面から出発したとすると, これが落下時刻.

この間に x 方向に移動する距離 (到達距離) は $\boxed{\;19\;}$.

(x,z) 空間での運動の軌跡を考えよう.

(28),(29) から t を消去しよう. (28) から $t = x(t)/v_{x0}$ なので,

$$z(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right)^2 + v_{z0}\left(\frac{x(t)}{v_{x0}}\right) \tag{30}$$

$$\textbf{平方完成} \rightsquigarrow = -\frac{g}{2v_{x0}^2}\left[x(t)^2 - 2\frac{v_{x0}v_{z0}}{g}x(t)\right] \tag{31}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}\left[\left(x(t) - \frac{v_{x0}v_{z0}}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_{x0}v_{z0}}{g}\right)^2\right] \tag{32}$$

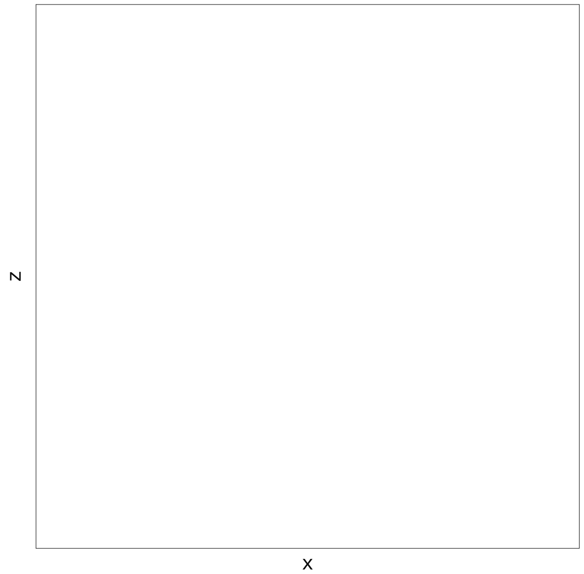
$$= -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x0}^2}(x(t) - x_{\mathrm{m}})^2 + z_{\mathrm{m}} \tag{33}$$

$$\textbf{平方完成} \Leftrightarrow x^2 - 2Ax = (x-A)^2 - A^2 \tag{34}$$

放物線!

最高点 $(x_{\rm m}, z_{\rm m}) = \boxed{20}$.

落下点 $(2x_{\rm m}, 0)$.



3.4 微分方程式

未知関数 $x(t)$ に関する方程式で, 微分を含んでいるものを 微分方程式 という.

求めるのは未知数でなく未知関数!

$x(t)$ を求める (微分を含まない式にする) ことを, 微分方程式を解く (微分方程式を積分する) という.

$x(0) = 0$ や $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(3) = 2$ のような, 特定の時刻 t についての条件を, 初期条件 という.

ここまで出てきた微分方程式はいちばん簡単なタイプ. (2 階常微分方程式の中の特別に簡単なもの)

数理情報学科の数学の先生たちの多くは微分方程式の専門家.

他の科目との関係

- 数値計算法 (2), 計算科学 (3): 微分方程式を計算機で数値的に解く.
- 数理モデル基礎 (2), 現象の数学 (3), 非線形解析 (3): より進んだ微分方程式の扱い.
- 偏微分方程式 (3), 多様体と力学系 (4): より進んだ微分方程式の数学的に厳密な取り扱い.
- 力学 I(2), 力学 II(3) 電磁気学 (2): 微分方程式が使われる物理.

3.5 今週の quiz

1. 質量 $m=1$ の物体が, 力 $\vec{F}=(1,t^2,0)$ を受けている．時刻 $t=0$ には, $\vec{r}(0)=(0,1,0), \vec{v}(0)=(0,0,0)$ だったとする．物体の運動を求めよ．また, (x,y)-空間での運動の軌跡を描け.

2. 重力 mg のもとでの質量 m の物体の運動を考える．上と同様に鉛直方向に z 軸, 水平面内に x,y 軸をとる．地表の高さを $z=0$ とする．時刻 $t=0$ に, 原点の直上で, 高さ $z=h$ の点から, xz 面内の, 地表面と角 θ をなす方向に, 初速の大きさ v_0 で, 物体を発射した．運動方程式と初期条件を書け (解かなくてよい).