7.1 前回の quiz の略解

1. (a) 斜面の傾きの角度を θ とする. $\sin\theta = 1/\sqrt{5}, \cos\theta = 2/\sqrt{5}$.

$$x \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\sin\theta, \tag{129}$$

$$y \text{ 方向} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\,mg\cos\theta + N, \tag{130}$$

(b) 初期条件は $x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ のもとで, $x(t) = -\sqrt{5}h$ となる時刻 $t > 0$ を求めると, $t = +\sqrt{10h/g}$. 垂直抗力は $N = \frac{2}{\sqrt{5}}mg$.

2. (a)

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg - \beta\cdot(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t))^3. \tag{131}$$

$v(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ とすると, $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -mg - \beta\cdot v(t)^3$ とかける.

(b) $t \to +\infty$ で, $v(t) \to v_\infty$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) \to 0$ となるとすると,
$0 = -mg - \beta\cdot(v_\infty)^3$. よって, $v_\infty = -(mg/\beta)^{1/3} < 0$.

8 摩擦力

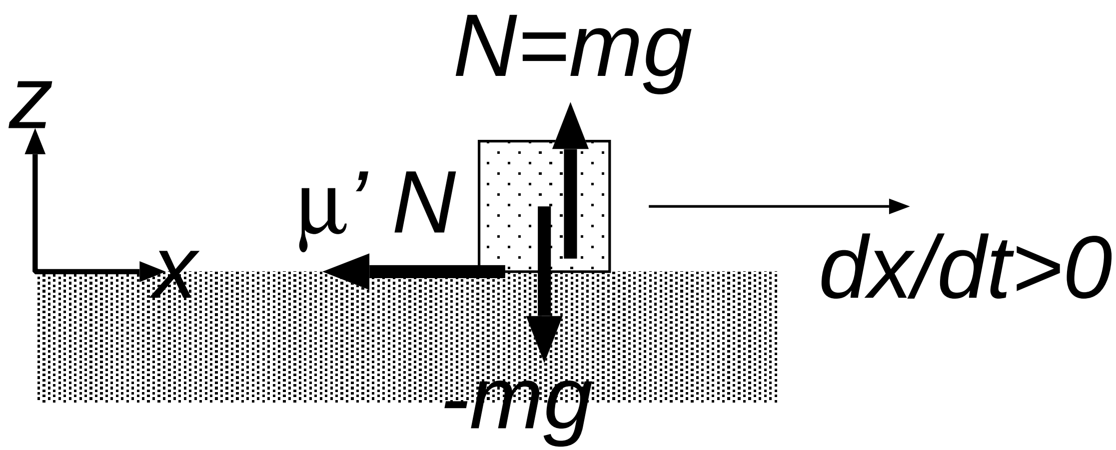
佐本 4.3

8.1 水平面上の動摩擦力

力を受けずに, なめらかでない (=粗い) 面上を運動する物体は, だんだん速さが遅くなり, 最後は止まってしまう. これは, ニュートンの第 1 法則に反するように見えるが, 実は, 粗い面が物体に, 摩擦力 (動摩擦力) を及ぼしているためである.

動摩擦力

は, 速さを減らすようにはたらき, 大きさは, 垂直抗力 N に比例する. 比例定数 μ' は 動摩擦係数 とよばれ, 面の性質, 物体と面の接



する面積などによってきまる.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)=\begin{cases}-\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)>0\right)\\ 0 & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)=0\right)\\ +\mu' N & \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)<0\right)\end{cases} \tag{132}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)=\boxed{46} \qquad \boxed{47} \tag{133}$$

N: 垂直抗力 (面が物体に及ぼす力)

例題 10 水平な粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える．水平方向に x 軸，鉛直方向に z 軸を取る．時刻 $t=0$ に初速度 $(v_x, v_z) = (v_0, 0), v_0 > 0$ で水平に物体を発射したところ，一直線上を運動した．物体にはたらく力は重力と動摩擦力だけだった．ただし，物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする．

1. 水平，鉛直それぞれの方向の運動方程式をたて，初期条件をかこう．

2. 時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよう．

3. 物体が静止するまでに進む距離を求めよう．

1. 垂直抗力の大きさを N として，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' N \tag{134}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg + N \tag{135}$$

初期条件は, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$, $(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0, z(0) = 0)$.

48

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\mu' g \tag{136}$$

2. 積分すると,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -\mu' g t + C_1, \tag{137}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}\mu' g t^2 + C_1 t + C_2. \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \tag{138}$$

初期条件より, 49 (139)

物体が静止する時刻 $t = T$ は 50 から決まり, $T = \frac{v_0}{\mu' g}$.

3. $t = 0$ から $t = T$ の間に物体の進んだ距離は,
$|x(T) - x(0)| = \left| -\frac{1}{2}\mu' g (\frac{v_0}{\mu' g})^2 + v_0 \frac{v_0}{\mu' g} + C_2 - C_2 \right| = \frac{v_0^2}{2\mu' g}$.

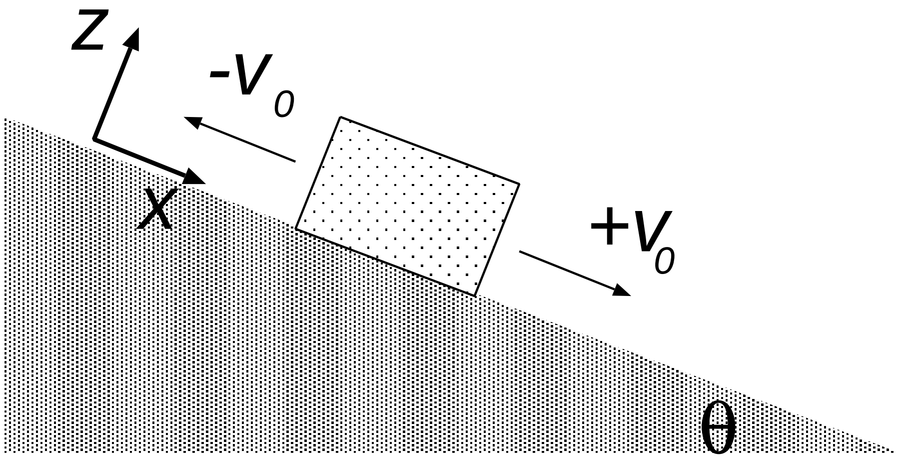
8.2 斜面と摩擦

佐本 4.3, 4.2

例題 11 角度 θ だけ傾いた粗い面の上をすべる質量 m の物体を考える. 斜面と平行な方向に x 軸, それと垂直な方向に z 軸を取る.

時刻 $t=0$ に原点から初速度の大きさ v_0 で物体を斜面にそって下向きに発射した. 物体と面の間の動摩擦係数を μ' とする.

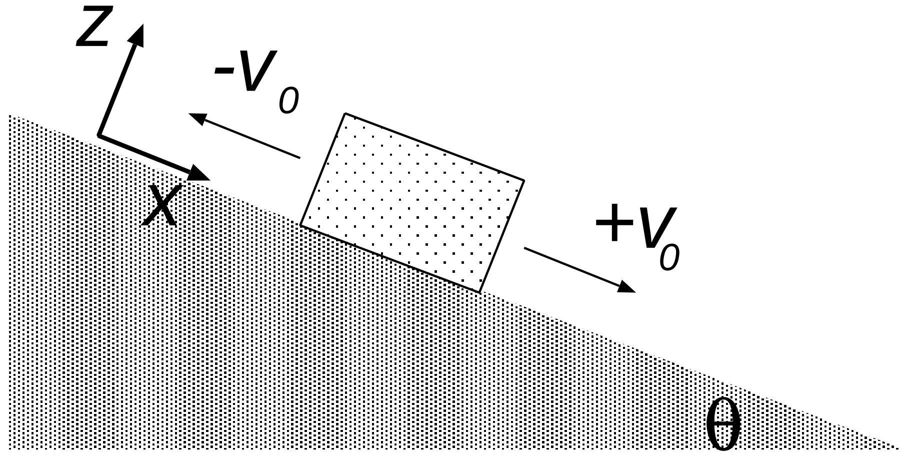
1. x, z それぞれの方向の運動方程式をたてよう.
2. 時刻 $t=0$ 以降の物体の運動を求めよう.
3. 物体が斜面の途中で止まるための θ に対する条件を求めよう.



quiz

例題と同じ状況で, 物体を, 初速度の大きさ v_0 で斜面にそって上向きに発射した場合の運動を求めよう. 物体が止まるまでに登る高さを求めよう.

Hint. **運動方程式の形は変わる. たてなおそう.**



8.3 静止摩擦力

上では, 物体が動いている状況を考えた.

一方, 粗い面上に止まっている物体は, 水平方向に小さい力で押しても動き出さない. これは, 加えられた力 $\vec{F}$ と

大きさは 51

向きは 52

の 静止摩擦力 $-\vec{F}$ が働くためである. 静止摩擦力の大きさは, 加えられた力に応じて変化する.

静止摩擦力の大きさ $|\vec{F}|$ は, 最大でも μN である. ここで, N は垂直抗力. μ は 静止摩擦係数 とよばれる比例係数. 最大静止摩擦力より大きな力を加えて初めて, 物体は動き始める. 以後は, 動摩擦力のみが働く.

静止摩擦係数と動摩擦係数の間には, 53 という関係が成り立つ.

例題 12 **静止摩擦係数 μ の水平面にある, 質量 m の物体に水平方向に力を加える. 動き始める瞬間の力を求めよう.**

54

例題 13 **静止摩擦係数 μ の斜面の傾きの角度を徐々に大きくしていったところ, 傾きの角度 θ で動き始めた. θ と μ の関係を求めよう.**

55

quiz

静止摩擦係数 μ の水平面に, 質量 m の物体を置き, 水平方向に大きさ F の力を加えたところ, 動き出した.

力 F が加わっても動き出さないように, 物体の上に質量 M の重りを置くことにする. 重りの質量は M はどれだけ以上である必要があるか.