9.6 $\frac{d^2x}{dt^2}(t)+a\cdot\frac{dx}{dt}(t)+b\cdot(t)=0$ 型微分方程式の解き方

$$\textbf{微分方程式}\quad \frac{d^2x}{dt^2}(t)+a\cdot\frac{dx}{dt}(t)+b\cdot(t)=0 \tag{185}$$

$$\textbf{初期条件 (たとえば)}\quad x(0)=0,\ \frac{dx}{dt}(0)=1 \tag{186}$$

1. **まず**, (186) **を満たさなくてもいいから**, (185) **の解を見つけよう**. $x(t)=e^{\lambda t}$ (λ **は定数**) **という形の解があるかもしれないと思って**, **これを** (185) **に代入**.

2. λ **についての** 2 **次方程式になる**. 2 **次方程式の** 2 **つの解** $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ **が得られる**.

3. $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}, x_2(t)=e^{\lambda_2 t}$ **は** (185) **の解**. **つまり** $\frac{d^2x_1}{dt^2}+3\frac{dx_1}{dt}+2x_1=0, \frac{d^2x_2}{dt^2}+3\frac{dx_2}{dt}+2x_2=0.$

4. $x_1(t), x_2(t)$ **とも**, **普通は初期条件** (186) **を満たさない**. **そこで**, **もっ**

と他の解も見つけたい．ここで次の定理．

定理． $x_1(t), x_2(t)$ が (185) の解であるとき，任意の定数 C_1, C_2 に対して，$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ も (185) の解になっている．

証明． $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ に対して，(185) の左辺が 0 になればよい．

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C_1 x_1 + C_2 x_2) + b(C_1 x_1 + C_2 x_2) \\
&= C_1 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + b x_1\right) + C_2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + b x_2\right) \\
&= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \qquad (x_1, x_2 \text{ は解なので})
\end{aligned}
$$

5. というわけで，$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ (C_1, C_2 は任意の定数) も (185) の解．実は，これ以外の解はない．

6. (186) に代入すると，C_1, C_2 についての連立方程式が得られる．これを解いて C_1, C_2 を決めると，(186), (185) の両方を満たす解が求まる．

先週の quiz の解答例

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) - 3\cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4 \tag{187}$$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **定数**) **を代入してみると**,

$$(\lambda^2 + 2\lambda - 3)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{188}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ **で割ると**,

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0. \tag{189}$$

解くと, $\lambda = -3, 1$. **よって**, $x(t) = C_1\mathrm{e}^{-3t} + C_2\mathrm{e}^{t}$ **は解** (C_1, C_2 **は任意の定数**) **これを初期条件に代入すると**,

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \tag{190}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 4 = -3C_1 + C_2. \tag{191}$$

これを解くと $C_1 = -1, C_2 = 1$. **よって**, **初期条件を満たす解は**

$$x(t) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-3t} + 1 \cdot \mathrm{e}^{t}. \tag{192}$$

先週の quiz の解答例

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 16x(t) = 0, \qquad x(0) = 0, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -4. \tag{193}$$

$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ (λ **定数**) **を代入してみると**,

$$(\lambda^2 + 16)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \tag{194}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ **で割ると**,

$$(\lambda + 4i)(\lambda - 4i) = 0. \qquad (i^2 = -1) \tag{195}$$

解くと, $\lambda = \pm 4i$. **よって**, $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{+4it} + C_2 \mathrm{e}^{-4it}$ **は解** (C_1, C_2 **は任意**

の定数) **これを初期条件に代入すると**,

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \tag{196}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -4 = 4iC_1 - 4iC_2 = 4i(C_1 - C_2) \tag{197}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = +i/2, C_2 = -i/2$. **よって**, **初期条件を満たす解は**

$$\begin{aligned} x(t) =& \tfrac{i}{2}(\mathrm{e}^{4it} - \mathrm{e}^{-4it}) \\ =& \tfrac{i}{2}([\cos 4t + i\sin 4t] - [\cos(-4t) + i\sin(-4t)]) \\ =& \tfrac{i}{2}([\cos 4t + i\sin 4t] - [\cos 4t - i\sin 4t]) \\ =& \tfrac{i}{2} 2i\sin 4t = -\sin 4t \end{aligned} \tag{198}$$

9.7 複素数について復習

定義. 実数 θ に対して

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \cdots \boxed{\text{オイラーの公式}} \tag{199}$$

定義. 複素数 $z = a + i\theta$ (a と θ は実数) に対して,

$$\boxed{e^{a+i\theta} = e^{a} \times e^{i\theta} = e^{a}(\cos\theta + i\sin\theta).} \tag{200}$$

性質. 複素数 $z = x + iy, w = u + iv$ に対して,

$$\boxed{e^{z+w} = e^{z} \times e^{w}} \tag{201}$$

$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **の証明みたいなもの**.

e^x **の** Taylor **展開で** $x = i\theta$ **とおくと**,

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{202}$$

$$\mathrm{e}^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{203}$$

一方, $\cos\theta, \sin\theta$ **の** Taylor **展開より**,

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots \tag{204}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots \tag{205}$$

$$i\sin\theta = i\theta - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \cdots \tag{206}$$

したがって, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

例題 17 $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ とおく．z, z^2, z^{100}, $1/z$ の実部，虚部を求めよう．

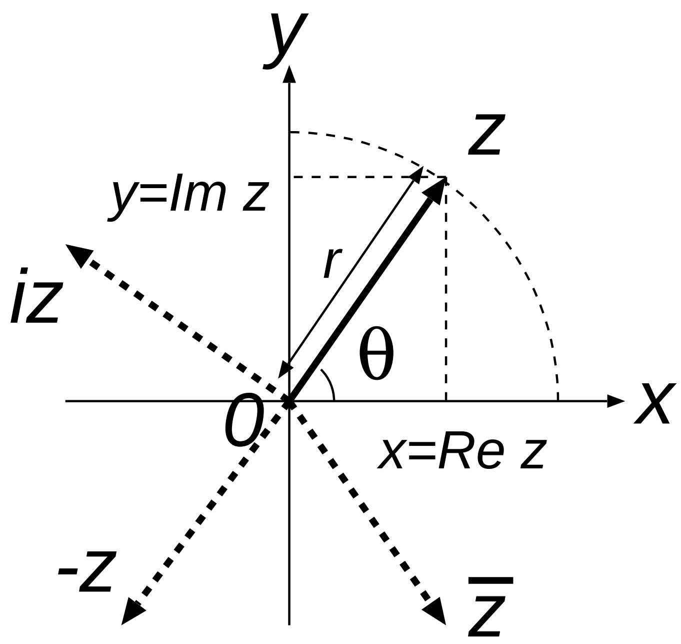
63

$z = x + iy$ は足し算が得意．$z = e^{a+i\theta}$ は掛け算が得意．

9.8 複素数の極表示

x, y, r, θ **は実数**, $r \geq 0$.

		普通の表示	極表示
複素数	z	$= x + iy$	$= re^{i\theta}$
実部	$\mathrm{Re}\, z$	$= x$	$= r\cos\theta$
虚部	$\mathrm{Im}\, z$	$= y$	$= r\sin\theta$
絶対値	$\lvert z \rvert$	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r (\geq 0)$
偏角	$\arg z$	$= \arctan \frac{y}{x}$	$= \theta$
複素共役	$\bar{z}$	$= x - iy$	$= re^{-i\theta}$



複素平面

横軸に実部 x, **縦軸に虚部** y **を描いたもの**

いくつかの公式

(**定義に戻ればすぐに導けるのでおぼえなくても** OK).

$z = x + iy = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $(x, y, r, \theta$ **は実数**.)

e^z の性質.

$$\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{2\pi i} = 1, \mathrm{e}^{\pi i} = -1. \tag{207}$$

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z} = \mathrm{e}^x \tag{208}$$

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}, \quad \text{特に } \overline{\mathrm{e}^{iy}} = \mathrm{e}^{-iy}. \tag{209}$$

微分積分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{zt} = z\mathrm{e}^{zt}. \tag{210}$$

$$\int \mathrm{e}^{zt}\mathrm{d}t = \frac{1}{z}\mathrm{e}^{zt} + C. \tag{211}$$

オイラーの公式を逆に解いたもの

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}, \tag{212}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \tag{213}$$

複素共役, -1 倍, 逆数.

$$\bar{z} = \overline{r\mathrm{e}^{i\theta}} = r\mathrm{e}^{-i\theta}, \tag{214}$$

$$-z = -r(\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}, \tag{215}$$

$$1/z = (r\mathrm{e}^{i\theta})^{-1} = (1/r)\mathrm{e}^{-i\theta} \tag{216}$$

例題 18

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 5 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \tag{217}$$

64

65

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-2t} \times (1 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin t). \tag{223}$$

quiz $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ の絶対値と偏角を求めよう．$z_2 = \mathrm{e}^{2+\frac{\pi}{6}i}$ の実部と虚部を求めよう．

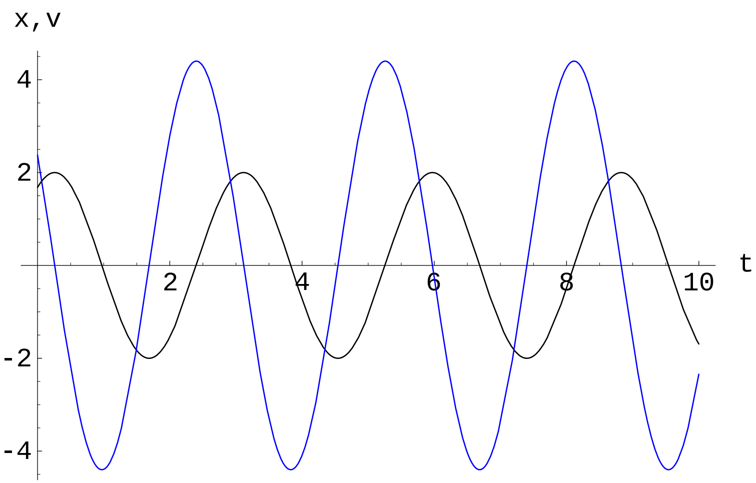
quiz

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + 10 \cdot x(t) = 0. \qquad x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -8. \tag{224}$$

10 振動

10.1 単振動

運動方程式



$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t). \tag{225}$$

の解は $\lambda^2 + k/m = 0$ の解を $\lambda = \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{k/m}$) とおいて,

$$\begin{aligned} x(t) =& D_1\mathrm{e}^{i\omega t} + D_2\mathrm{e}^{-i\omega t} \\ =& (D_1 + D_2)\cos\omega t + i(D_1 - D_2)\sin\omega t \\ =& C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t. \end{aligned} \tag{226}$$

このような振動を $\boxed{\text{単振動 (調和振動)}}$ **という.**

$x(t)$ **は実数なので,** $D_1 = \bar{D}_2$ **である. 極表示で**
$D_1 = \frac{A}{2}\mathrm{e}^{i\theta_0}, D_2 = \frac{A}{2}\mathrm{e}^{-i\theta_0}$ **とかこう. すると,**

$$
\begin{aligned}
x(t) =& \frac{A}{2}\mathrm{e}^{i\theta_0}\mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{A}{2}\mathrm{e}^{-i\theta_0}\mathrm{e}^{-i\omega t} = \frac{A}{2}(\mathrm{e}^{i(\omega t+\theta_0)} + \mathrm{e}^{-i(\omega t+\theta_0)}) \\
=& A\cos(\omega t + \theta_0).
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = - A\omega\sin(\omega t + \theta_0)
$$

振幅 A [m] $\cdots$ $|x(t)|$ **の最大値.**
位相 $\omega t + \theta_0$ [rad]
初期位相 θ_0

$\boxed{66}$ ω [rad/s] (**単位時間に進む位相**)

$\boxed{67}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s] ($\omega T = 2\pi$ **ごとに戻るから.**)

$\boxed{68}$ $\nu = f = 1/T$ [Hz=1/s] (**単位時間あたり何周期**?).

パチンコの問題を力学で考えると.

例題 19 バネ定数 k のバネの先に, 質量 m の物体がついている. 時刻 $t=0$ に, バネを, 自然長よりも長さ ℓ だけ縮めて静かに離した. $t=0$ 以降の運動を求め, 速さの最大値を求めよう.

特別講義 年に 3 回あるやつ. 12 月 16 日 (月) 5 講時. 1-107 講義室.

冬のプチテスト 12 月 20 日 (金) 3 講時. 1-107 講義室. 範囲は前回配布.

補講 12 月 27 日 (金) 2 講時. 1-107 講義室.