先週の quiz の略解

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4x(t) + 8 = 0 \tag{271}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t) + 2) + 4(x(t) + 2) = 0 \tag{272}$$

なので, $X(t) = x(t) + 2$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + 4X(t) = 0 \tag{273}$$

これを解くと,

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{2it} + C_2 \mathrm{e}^{-2it}. \tag{274}$$

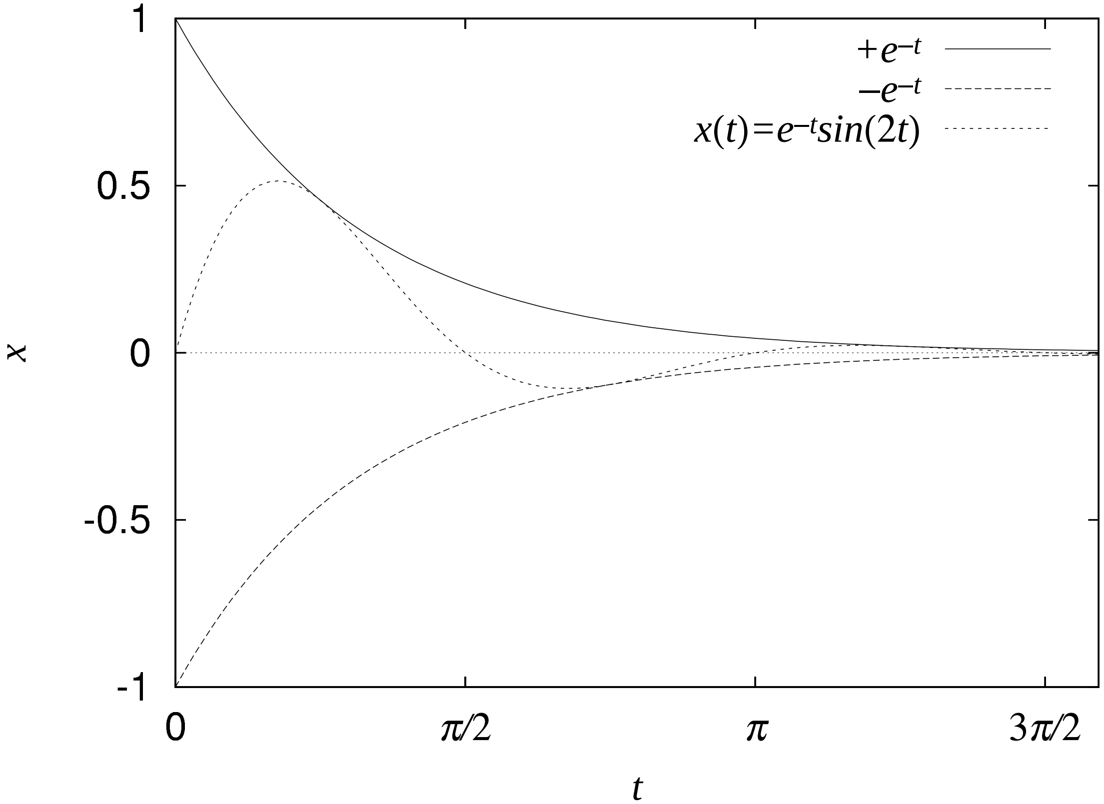
よって,

$$x(t) = X(t) - 2 = C_1 \mathrm{e}^{2it} + C_2 \mathrm{e}^{-2it} - 2. \tag{275}$$

$x(t) = D_1 \cos(2t) + D_2 \sin(2t) - 2$ も可.

先週の quiz の略解

1. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ **とおいてみるなどして解くと**, $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$. **これは減衰振動**.



2. **過減衰となるのは, 特性方程式** $\lambda^2 + 2\lambda + c = 0$ **の判別式** $D = 2^2 - 4c > 0$ **となるとき. よって**, $c < 1$.

13 エネルギー保存則と位置エネルギー

13.1 エネルギー保存の例

例題 21 ばねの運動を表わす運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -kx(t) \tag{276}$$

の, **初期条件**

$$x(0) = A, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}B \tag{277}$$

のもとでの解を考える.

このとき, **量**

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + 12k\cdot(x(t))^2 \tag{278}$$

を求めよう.

75

13.2 力学的エネルギーの保存 (1 次元)

位置 x だけで決まる力 $F(x)$ を受けて 1 次元の運動をする, 質量 m の質点を考えよう.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)). \tag{279}$$

あてはまる例 **バネの力.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t). \quad \text{すなわち} \quad F(x) = -k \cdot x. \tag{280}$$

そうでない例 **空気抵抗を受けるバネ. 力 F は, x と v の関数.**

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k \times x(t) - \gamma \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{281}$$

(279) で $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ とおくと,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t)). \tag{282}$$

誰かが思いついた超絶技巧. 両辺に $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ をかける.

$$mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t). \tag{283}$$

$$\int mv(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = \int F(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \tag{284}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 左辺} = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2 + C_1. \tag{285}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \text{ より, 右辺} = \int F(x)\mathrm{d}x. \tag{286}$$

関数 $U(x)$ を, 力 $F(x)$ から

$$\boxed{U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x'} \tag{287}$$

で定義する

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = -U(x) + U(0) + C_2. \tag{288}$$

すなわち
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + U(x(t)) = E.(\text{一定}) \tag{289}$$

第 1 項 $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2$ を質点の 76 という.

(287) で定義される第 2 項 $U(x)$ を質点の 77 , または 78 という.

両者の和 E を, 力学的エネルギー という.

式 (289) は, 力 $F(x)$ のもとで 1 次元を運動する質点の力学的エネルギー E は一定で変化しないことをいっている. これを,

　　力学的エネルギーは $\boxed{79}$, 力学的エネルギーは $\boxed{80}$ である, 力学的エネルギーは不変である

などという.

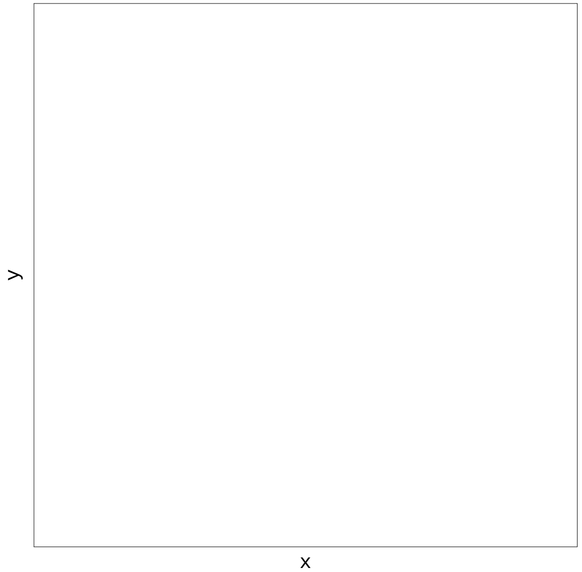
一般に, 力 F が, ある関数 U を用いて,

$$\boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x)} \qquad (290)$$

と書けるとき, そのような力は $\boxed{\text{保存的}}$ であるといい, 関数 $U(x)$ のことをポテンシャルまたは位置エネルギーと呼ぶ.

$$U(x) \underset{-\int \mathrm{d}x}{\overset{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\rightleftarrows}} F(x)$$

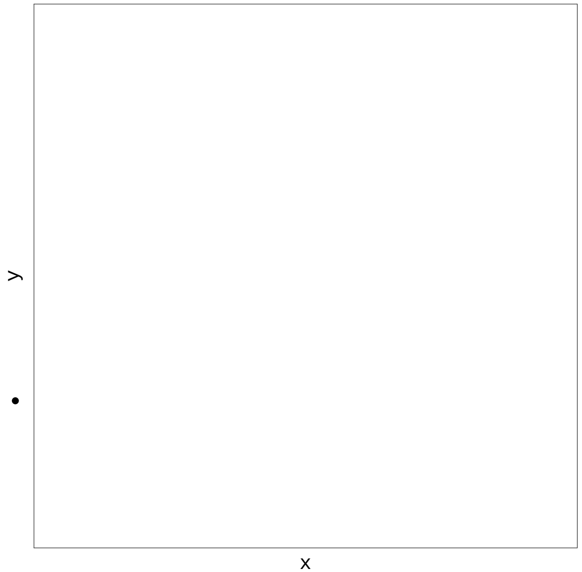
例 **重力のもとでの鉛直方向の運動**．**高さを** x **とかく**．$F(x) = -mg$.



$$U(x) = -\int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = -\int_0^x -mg\,\mathrm{d}x' = mgx.$$

保存則　$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + mgx(t) = E(\textbf{一定}).$

例 **バネの力のもとでの運動**．**自然長からの変位を** x．$F(x) = -kx$.



$$U(x) = -\int_0^x F(x')\mathrm{d}x' = -\int_0^x (-kx')\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}kx^2.$$

保存則　$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 = E(\textbf{一定}).$

例題 22　*1.* **ポテンシャルが $U(x)=x^4-x^3-x^2+x$ であるとき, 質点が受ける力 $F(x)$ を求めよう.**

2. **重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 地表から速度 v_0 で鉛直上向きに打ち出した. 最高点の (地表から測った) 高さを, 力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.**

81

82

quiz 1

1. 1 次元を運動する質点にはたらく力が $F(x) = -x - x^3$ であるとき, ポテンシャル $U(x)$ を求めよう.

2. 重力のもとで (重力加速度 g), 質量 m の質点を, 高さ h_0 の点から静かに落下させた. 高さ h_1 の点まで落下したときの速さを力学的エネルギー保存則を用いて求めよう.

$U(x)$ には, 定数の不定性がある

$U(x)$ の定義 (287) では, 下端を $x=0$ としたが, 任意の $x=x_0$ としてよい. このとき, $U(x)$ は定数だけ変化する.

$$\begin{aligned} U_{\text{new}}(x) &= -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' \\ &= -\int_{0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' - \int_{x_0}^{0} F(x')\mathrm{d}x' \\ &= U(x) + (\text{定数}) \end{aligned} \tag{291}$$

つまり $U(x)+C$ が位置エネルギーと思ってもよい.

どうせ微分して力 $F(x)$ を求めたら変わんないしー.

$U(x)$ は‘仕事’

質点が，一定の力 F をうけて，x_0 から x_1 まで動いたとする．このとき，

$$\boxed{W = F \times (x_1 - x_0) = F \times \Delta x} \tag{292}$$

を，力 F のした 仕事 という．

力の向きと移動方向が同じなら $W > 0$，逆なら $W < 0$．

力の向き	移動方向	仕事
$\rightarrow (+)$	$\rightarrow (+)$	$(+)$
$\rightarrow (+)$	$\leftarrow (-)$	$(-)$
$\leftarrow (-)$	$\rightarrow (+)$	$(-)$
$\leftarrow (+)$	$\leftarrow (-)$	$(+)$

W が大きいほど，力 (出してる人) は仕事が多くてたいへん，という感じ．

力が x の関数 $F(x)$ である場合には

$$W = \sum_i F(x_i)\Delta x \rightsquigarrow W = \int_{x_0}^{x_1} F(x')\mathrm{d}x' \tag{293}$$

となる．

位置エネルギー

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\mathrm{d}x' = \int_{x}^{x_0} F(x')\mathrm{d}x' \tag{294}$$

は, 仕事 という言葉を使うと, 次のように解釈できる.

- 世の中にある力 F に反抗して, 自分で $-F+$ (ちょっとの力) を使って x_0 から x まで運ぶとする. そのときに自分がする仕事が $U(x)$. なので, 位置エネルギーが大きい場所は, 行くのにたくさん仕事が必要.

- 質点が世の中にある力 $F(x)$ をうけて x から x_0 まで移動するときにする仕事が $U(x)$. つまり, $x=0$ にある質点には $U(x)$ だけの仕事をする能力がある.

13.3 位置エネルギーを用いた運動の解析

力学的エネルギー E を持つ物体の運動は,

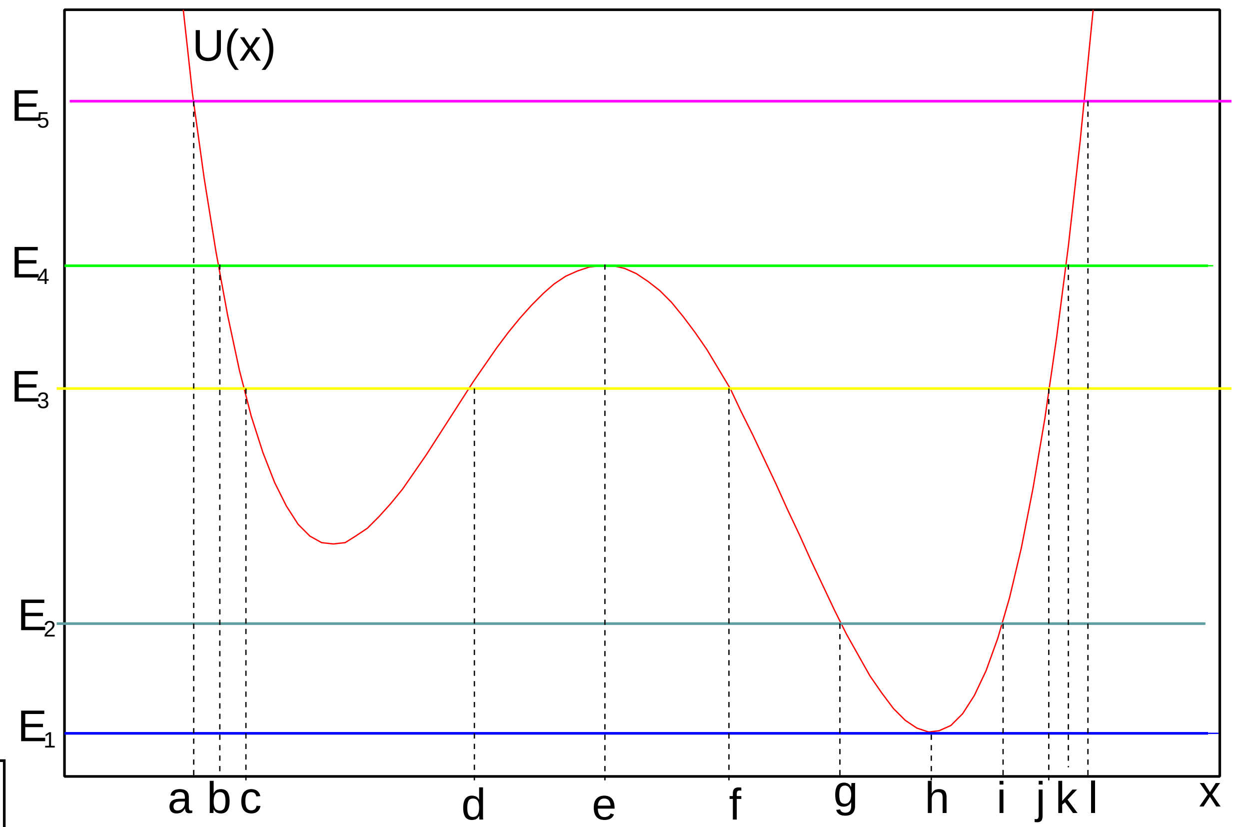
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2+U(x)=E. \tag{295}$$

を満たす (力学的エネルギー保存則). 変形して,

$$E-U(x)=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2\geq 0. \tag{296}$$

- 質点は, $E-U(x)\geq 0$ であるような x にしか移動できない.
- $E-U(x)=0$ であるような x では, 速度が 0 になる.

この性質を用いて, 質点の運動の様子を理解できる.



例

$E = E_1$ **のとき**, $x = h$ **で静止**.

$E = E_3$ **のとき**, $c \le x \le d$ **を往復**. **または**, $f \le x \le j$ **を往復**

$E = E_4$ **のとき**, $x = e$ **で静止**. **または**, $b \le x < e$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. **または**, $e < x \le j$ **から** $x = e$ **に限りなく近づく**. $(t \to \infty)$

quiz 2 $E = E_2, E_5$ **のときの運動を, 上の例ののりで説明しよう**.

13.4 興味と暇がある人のための注 1

(289) を $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ について解いた

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \tag{297}$$

を積分することによっても $x(t)$ が求められる．落下運動の場合:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - mgx)} \tag{298}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{E}{mg} - x}} = \sqrt{2g}\mathrm{d}t \tag{299}$$

$$-2\sqrt{\frac{E}{mg} - x} = \sqrt{2g}t + C \tag{300}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{301}$$

13.5 興味と暇がある人のための注 2

3 次元での力とポテンシャルとの関係 (応用ベクトル解析)

$$\vec{F}(x,y,z) = (-\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z), -\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z), -\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)). \tag{302}$$

2 次元以上では, 保存的でない力のほうが普通.

冬のプチテストの結果について

答案の裏に書いてある数字は 120 点満点での点数 x です.

ファイナルトライアル

2003/01/31(金)3 講時. 1-107.

科目の成績は 100 点$=$ quiz $10 +$ 秋のプチテスト $15 +$ 冬のプチテスト $25 +$ ファイナルトライアル 50.

ただし, 上の式に関わらず, 秋のプチテスト, 冬のプチテスト, 毎回の quiz から計算される点数がすべて 1 点以上である人は, ファイナルトライアルが 50 点中 35 点以上であれば無条件に合格とします.

試験範囲は, 次回にある程度詳しく説明しますが, 基本的には授業で説明した部分すべてです.