確率統計☆演習 I ファイナルトライアル

樋口さぶろお [1]　配布: 2015-01-23 Fri 更新: Time-stamp: "2015-02-03 Tue 09:46 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

確率変数 X は,

- 値 $X = -4$ を確率 $\frac{2}{3}$ で
- 値 $X = +2$ を確率 $\frac{1}{3}$ で

とる.

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. 条件 $-X > \mathrm{e}^X$ が満たされる確率を求めよう.

2

確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

3

確率変数 X が, 母平均値 $\mu = -3$, 母分散 $\sigma^2 = 2^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(-3, 2^2)$ にしたがう. $-2 < X < +2$ が成立する確率を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

フライドチキン屋さんのフライドチキンの在庫 (=母集団) から, 無作為に 6 本のチキンを取り出したところ, 重さは次のようだった (単位は g.).

$117, 120, 120, 121, 122.$

1. 重さの母平均値を点推定しよう (単位つきで). 答案には, 「母平均値は…」という文をいれよう.
2. 重さの母分散を点推定しよう (単位つきで). 答案には, 「母分散は…」という文をいれよう.

5

ある動物の卵の重さ $X\mathrm{g}$ は, 確率変数とみなすことができ, 正規分布に従うことがわかっている. しかし, 母平均値 μ_1, 母分散 σ_1^2 はわからない.

卵 5 個からなる標本を抽出したところ, 標本平均値が $35\mathrm{g}$, 不偏標本分散が $45\mathrm{g}^2$ だった.

1. 従来の説によれば母平均値は $\mu_0 = 25$ である. 真の母平均値 μ_1 が $\mu_0 = 25$ と異なる (対立仮説) かどうかを標本から考えたい. 帰無仮説を, 「X の母平均値 μ_1 は $\mu_0 = 25$ に等しい」として, 有意水準 5% で t 検定を行おう.
2. 従来の説によれば母分散は $\sigma_0^2 = 20$ である. 真の母分散 σ_1^2 が $\sigma_0^2 = 20$ と異なる (対立仮説) かどうかを標本から考えたい. 帰無仮説を, 「X の母分散 σ_1^2 は $\sigma_0^2 = 20$ に等しい」として, 有意水準 5% で χ^2 検定を行おう.

6

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するドーナツの重さ Xg は, 母平均値 μ , 母分散 σ^2 の正規分布にしたがう確率変数である. $n = 4$ 個のドーナツからなる標本について, X の標本平均値は 48g, 不偏標本分散は 36g^2 だった.

実数 (小数) の加減乗除平方根は計算しないまま残してよい.

1. 母平均値 μ を, t 分布を用いて, 信頼係数 95%で区間推定しよう.
2. 母分散 σ^2 を, χ^2 分布を用いて, 信頼係数 95%で区間推定しよう.

7

某アイドル集団の総選挙の中間集計の結果 (=標本) では, 候補 MW は 400 票中ちょうど 80 票を獲得していた. 総選挙の全投票 (=母集団) での, 候補 MW の得票率 p を信頼区間 99%で推定しよう. ただし, この標本は無作為抽出されたものと考える (MW 推しの有権者は早めに投票する傾向がある, というようなことはないとする).

実数 (小数) の加減乗除平方根は計算しないまま残してよい.

8

$\boxed{\text{過程不要}}$

8-1

標本が与えられたときの母平均値の区間推定について, **正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 不偏標本分散が小さいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
2. 信頼係数が大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
3. 標本サイズが小さいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
4. 標本平均値が大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる

8-2

標本抽出と推定について, **正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 母平均値は, 標本平均値の推定値である.
2. 不偏標本分散は, 母分散の推定値であり, 両者は必ずしも等しいわけではない
3. 母分布 (母集団) が与えられたとき, 一般に, 標本のサイズは定まっている
4. 標本平均値は, 母分布 (母集団) が同じなら, どの標本でも等しい

8-3

ある母集団から, サイズ n の標本を抽出し, 標本平均値を求めることを繰りかえす. n は大きいとする.

一般に**正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 標本平均値は, 近似的に, 母集団と同じ分布に従う
2. 標本平均値は, 近似的に, 正規分布に従う
3. 標本平均値は, 近似的に, 2 項分布に従う
4. 標本平均値は, 近似的に, カイ二乗分布に従う

8-4

検定について**正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 有意水準が大きいほど, 帰無仮説は棄却されやすい
2. p 値が信頼係数より小さいとき, 帰無仮説を棄却する
3. 有意水準とは, 帰無仮説が誤りなのに, 棄却できない確率である
4. 帰無仮説が棄却できないとき, 対立仮説は誤りであると結論する

龍谷大学 > 理工学部 > 数理情報学科 > 樋口 > 担当科目 > 2014 年 > 確率統計☆演習 I

確率統計☆演習 I ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお [2]　配布: 2015-01-23 Fri 更新: Time-stamp: "2015-02-03 Tue 09:46 JST hig"

配点　1,2:各 15 点,3:6 点,4:10 点,5,6:各 14 点,7:10 点,8.*:各 4 点, 計 100 点.

1

1. -2
2. 8
3. $\frac{2}{3}$

配点　1,2,3:各 5 点, 計 15 点.

2

1. $\mathrm{E}[X] = \frac{2}{3}$.
2. $\mathrm{E}[X^2] = \frac{1}{2}$.
3. $\mathrm{V}[X] = \frac{1}{18}$.

配点　1,2,3:各 5 点, 計 15 点.

3

$Z = \frac{X-(-3)}{2}$ は標準正規分布に従う. 確率は $Q(\frac{+2-(-3)}{2}) - Q(\frac{-2-(-3)}{2}) = 0.3085 - 0.0062 = 0.3023$.

配点　6 点.

4

1. 標本平均値は, $\bar{x} = 120\mathrm{g}$ である. 母平均値は $120\mathrm{g}$ と推定できる.
2. 不偏標本分散は, $s^2 = 3.5\mathrm{g}^2$ である. 母分散は $3.5\mathrm{g}^2$ と推定できる.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5

1. (a) 有意水準を 5%とする.
   (b) 正規分布の母平均値の t 検定を行う.
   (c) 帰無仮説を「卵の重さの母平均値は $\mu_0 = 25$ g に等しい」とする.
   (d) サイズ $n = 4$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とすると,

   $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}}$$

   は, 自由度 $4 - 1$ の t 分布に従う. これを検定統計量として用いる.
   (e) この標本に対して, $\bar{X} = 35, S^2 = 45$ のとき, $t = \frac{35-25}{\sqrt{45/5}} = 10/3$.
   (f) t 分布表より, $t_{0.05/2}(4) = 2.776 < |t|$ なので, 帰無仮説は棄却される. 標本平均値は, $\mu_0 = 25$g と有意な差がある.
2. (a) 有意水準を 5%とする.
   (b) 正規分布の母分散の χ^2 検定を行う.
   (c) 帰無仮説を「卵の重さの母分散はは $\sigma_0^2 = 20$ g に等しい」とする.
   (d) サイズ $n = 4$ の標本の不偏標本分散を S^2 とすると,

   $$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

   は, 自由度 $n - 1 = 5 - 1$ の χ^2 分布に従う. これを検定統計量として用いる.
   (e) この標本に対して, $S^2 = 45$ のとき, $\chi^2 = 4 \cdot \frac{45}{20} = 9$.
   (f) χ^2 分布表より, $\chi^2_{0.975}(4) < \chi^2 < \chi^2_{0.025}(4)$ なので, 帰無仮説は棄却されない標本分散は $\sigma_0^2 = 45$ と有意な差はない.

配点 1:帰無仮説 1 点, t 2 点, $t_{0.025}(4)$ 2 点, 棄却される 2 点, 計 7 点.
2:帰無仮説 1 点, χ^2 2 点, $\chi_{0.025}(4)$ 1 点,$\chi_{0.975}(4)$ 1 点, 棄却される 2 点, 計 7 点.

6

標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を S^2 とする.

1. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}$ は自由度 $n - 1$ の t 分布に従う. よって, 95% 信頼区間は,

   $$48 - 3.182 \times \sqrt{36/4} < \mu < 48 + 3.182 \times \sqrt{36/4}$$

2. $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n - 1$ の χ^2 分布に従う. よって, 95% 信頼区間は,

   $$(4-1) \cdot \frac{36}{9.348} < \sigma^2 < (4-1) \cdot \frac{36}{0.2158}$$

配点　1,2:各 7 点, 計 14 点.

7

母比率 p は, $\frac{80}{400} = 0.2$ と推定できる.
母分散は $0.2 \times (1 - 0.2) = 0.16$ と推定できる.
母比率 p の信頼係数 99%の信頼区間は,

$$0.2 - 2.58 \times \sqrt{\frac{0.16}{400}} < p < 0.2 + 2.58 \times \sqrt{\frac{0.16}{400}},$$

すなわち, $0.1484 < p < 0.2516$.

配点　点推定値 3 点, 区間推定 7 点.

8

8-1

1

8-2

2

8-3

2

Remark　正確には, 標準化したときに, $n \to +\infty$ で標準正規分布に近づく, です. 選択肢の中でもっとも適切なのは 2 です.

8-4

1

配点　1,2,3,4:各 4 点, 計 16 点.