連続型確率変数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L07(2014-11-14 Fri)

今日の目標

- 連続型離散確率分布が与えられたときに, 確率変数の母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差が計算できる
- 連続型確率分布が与えられたときに, 事象の確率が計算できる

http://hig3.net

L06-S1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

1. 期待値 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^X) = \frac{1}{3}\cdot\mathrm{e}^{-1} + \frac{5}{12}\cdot\mathrm{e}^{0} + \frac{1}{4}\cdot\mathrm{e}^{2}$.
2. 母平均値 $\mathrm{E}(X) = -1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{5}{12} + 2\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{6} = 1.67$.
3. 母分散 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[(X-m)^2] =$ $(-1-\frac{1}{6})^2\cdot\frac{1}{3} + (0-\frac{1}{6})^2\cdot\frac{5}{12} + (2-\frac{1}{6})^2\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{6} = \frac{47}{36} = 1.31$.
4. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{\frac{47}{36}} = 1.14$.
5. 確率 $\mathrm{E}[\mathbf{1}_\mathrm{A}(\mathrm{X})] = 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{5}{12} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

L06-S2

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

1. 母期待値 $\mathrm{E}[\sin(\frac{\pi}{2}X)] = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0$.
2. 母平均値 $\mathrm{E}(X) = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p$
3. 母分散 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[(X-m)^2] = (1-p)^2\cdot p + (0-p)^2\cdot(1-p) = p(1-p)$.
4. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{p(1-p)}$.

平均値, 分散の性質

母平均値の性質

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき,

$$\mathrm{E}[aX+b] = \sum_{k=1}^{m} P(X=x_k) \times (ax_k + b)$$
$$= \left(a \sum_{k=1}^{m} P(X=x_k) x_k \right) + b = a\mathrm{E}[X] + b.$$

$$\mathrm{E}[\phi_1(X) + \phi_2(X)] = \sum_{k=1}^{m} P(X=x_k) \times (\phi_1(X) + \phi_2(X))$$
$$= \mathrm{E}[\phi_1(X)] + \mathrm{E}[\phi_2(X)].$$

もちろん一般には $\mathrm{E}(\phi(X)) \neq \phi(\mathrm{E}(X))$, $\mathrm{E}(X^2) \neq (\mathrm{E}(X))^2$.
これ, $\sin(x^2) \neq (\sin(x))^2$ と同じくらいだいじ.

母分散の性質

X: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$:定数 のとき,

$$\mathrm{V}[aX + b] = a^2 \mathrm{V}[X].$$

母分散の性質 (これ計算に便利)

$$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$$

ここまで来たよ

1. 略解:離散型確率変数
2. 離散型確率変数 (続き)
   - X のとる値の範囲が $\mathbb{Z}$ 全体のとき
3. 連続型確率変数
   - 連続的な確率変数

X のとる値の範囲が $\mathbb{Z}$ 全体のとき

今まで $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 5.$ $(m = 3)$
$\to$ こんど $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \cdots, x_k = k, \cdots.$ $(m = \infty)$
x_k のかわりに $k \in \mathbb{Z}$ つかったほうが楽. $P(X = x_k) \to P(X = k)$.

k	確率 $P(X = k)$
0	0.02
1	0.03
2	0.00
$\vdots$	$\vdots$
k	$f(k)$
$\vdots$	$\vdots$

$$\text{期待値}\quad \mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)\phi(k)$$

$\mathrm{E}[\phi(X)]$ は難しい数列の問題になってしまうことが多い (正攻法では).

2 項分布 $\mathrm{B}(n, p)$

$$P(X = k) = {}_n\mathrm{C}_k \cdot p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

- ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1, p)$ に従う X を n 回繰りかえし試行したときに, $X = 1$ となる回数の分布
- 確率 p で表が出るコインを n 回投げたとき, 表が k 回出る確率

$x_k = k$	確率 $P(X = k)$
0	$1 \cdot p^0 (1-p)^n$
1	$n \cdot p^1 (1-p)^{n-1}$
2	$\frac{n(n-1)}{2} \cdot p^2 (1-p)^{n-2}$
$\vdots$	
k	$f(k) = {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k}$
$\vdots$	
n	$1 \cdot p^n (1-p)^0$

2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

L07-Q1

Quiz(2 項分布)

2 項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X を考える.

1. 母期待値 $\mathrm{E}[1] = 1$ を確かめよう.
2. 事象 $X < 2$ の確率を求めよう.
3. X の母平均値を求めよう.
4. X の母分散を求めよう.
5. X の母標準偏差を求めよう.

幾何分布 $G(n,p)$

$$P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}\qquad(k=1,2,\dots)$$

- ベルヌーイ分布 $B(1,p)$ に従う X を 繰りかえし試行したときに, k 回目で初めて $X=1$ となる確率

L07-Q2

Quiz(幾何分布)

確率変数 X が幾何分布 $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}\qquad(k=1,2,\dots)$ に従うとする.

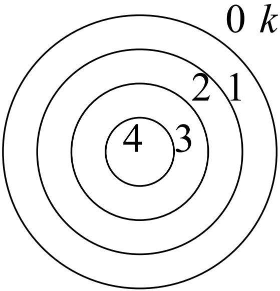
1. 確率 $P(X\leq n)$ を求めよう ($n\in\mathbb{N}$).
2. X の母平均値を求めよう.
3. X の母分散を求めよう.

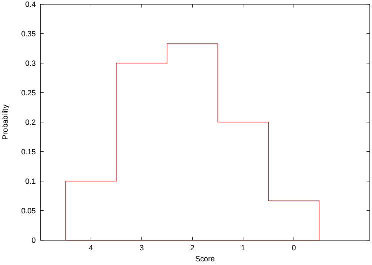
ここまで来たよ

1. 略解:離散型確率変数
2. 離散型確率変数 (続き)
   - X のとる値の範囲が $\mathbb{Z}$ 全体のとき
3. 連続型確率変数
   - 連続的な確率変数

あるプレイヤーのダーツの得点確率

得点: 的の真ん中から順に $4, 3, 2, 1, 0$ 点



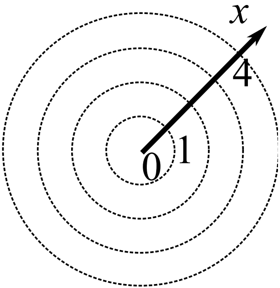


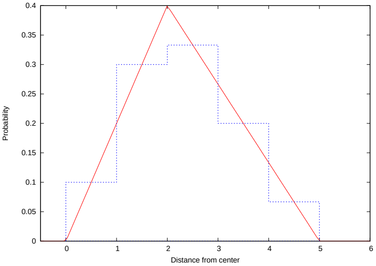
離散的な確率分布

得点 k	確率 $P(X = k)$
0	0.0667
1	0.2
2	0.3333
3	0.3
4	0.1

中心から x cm にあてる確率

的の真ん中からの距離 x cm．点数 $4-x$ 点





0.5cm と 0.9 cm への当たりやすさは違う．1.0cm を境に急に変わるわけじゃない．これを表現したい．

⇝ 当たりやすさは距離 x の関数 $f(x)$ で表される!

連続的な確率分布 $\boxed{}$ $f(x)$

連続的な確率変数

連続的な確率変数 X とは, 確率が 確率密度関数 $f(x)$ で指定されるもの.

離散的

得点 k	確率
0	0.0667
1	0.2
$\vdots$	
k	$f(k)$
$\vdots$	

連続的

- $f(x)$ が大きいほど, その値 x が $\boxed{}$
- $0 \leq f(x)$.
- 1 を超えることもある.

物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

連続的な確率変数の母期待値

期待値

離散的　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_k f(k) \cdot \phi(k)$

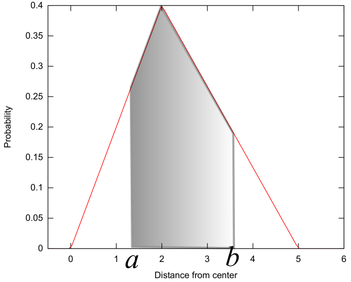
連続的　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \lim_{\text{分割}\to\text{細かく}} \sum_k f(x_k) \cdot \phi(x_k)\Delta x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$

確率密度関数の意味

$$P(a \leq X < b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbf{1}_{[a \leq X < b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \boxed{}$$

全事象の確率 $= \mathrm{E}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$

じゃあ，ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.



$$\mathbf{1}_{[X \text{ の条件}]} = \begin{cases} 1 & (X = x \text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

L07-Q3

Quiz(連続的な値をとる確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. $x > +\frac{1}{4}$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{\sqrt{X}}]$ を求めよう.

L07-Q4

Quiz(連続的な値をとる確率変数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を考える.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (1 \leq x < \mathrm{e}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. $0 \leq X < 2$ となる確率を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
4. 母期待値 $\mathrm{E}[\frac{1}{X}]$ を求めよう.

連絡

- 予習問題ポリシー変更: 点数:最終受験→最高点, 締切:水 9:20 →金 9:00, 正誤表示:締切後→受験後.
- 2014-11-15 土 3 数学検定勉強会 1-537.
- 2014-11-17 から チューターは月火水木昼 (1-614).
- 2014-11-21 金 2 プチテスト. 非参照. 30 ピーナッツ.
- 2014-11-21 金 3 特別研究履修説明会 (3 年生向け) 英語と重なっちゃう…
- 2014-12-03 水 4 数理情報学科特別講義

プチテスト計画!

- 2014-11-21 金 2, 75 分 (御生誕法要だから), 30 ピーナッツ, 参照相談なし. 紙のテスト.
- まず授業でやらなかったページに×つけましょう.
- 過去問ありません. 下の出題計画, 非参照 Quiz, 予習問題をやり直すことをお奨めします.
- 出題計画. Excel 関係のものはありません.
    - データから平均値, 分散, 標準偏差を求める
    - データから箱ひげ図を描く
    - データから共分散, 相関係数を求める
    - データから回帰係数, 回帰直線を求める
    - 離散型確率変数について, 確率, 期待値, 平均値, 分散, 標準偏差を求める
    - 連続型確率変数について, 確率, 期待値, 平均値, 分散, 標準偏差を求める
    - 選択肢的な問