

統計的仮説検定

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I L12(2015-01-09 Fri)

今日の目標

- 目的にあわせて帰無仮説が設定できる
- 正規分布の母平均値に関する t 検定が行える



<http://hig3.net>

L12-S1

Quiz 解答:推定

母平均値の推定値は, 標本平均値で与えられ,

$$\bar{x} = \frac{1}{5}[10 + 20 + 30 + 30 + 110] = 40(\text{分})$$

母分散の推定値は, 標本(不偏)分散で与えられ,

$$s^2 = \frac{1}{5-1}[(10-40)^2 + (20-40)^2 + (30-40)^2 + (30-40)^2 + (110-40)^2] = 1600(\text{分}^2)$$

母標準偏差の推定値は, (不偏)標本分散の平方根で与えられ,

$$s = \sqrt{1600} = 40(\text{分})$$

L12-S2

Quiz 解答:推定

これはサイズ 10 の標本.

標本平均値は

$$\frac{1}{10}[0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10 + 10 + 30 + 100] = 15(\text{円})$$

. よって, 母平均値は 15 円と推定される.

(不偏) 標本分散は

$$\frac{1}{10-1} [(0-15)^2 \times 6 + (10-15)^2 \times 2 + (30-15)^2 + (100-15)^2] = 930.6(\text{円}^2)$$

. よって, 母分散は 930.6 円^2 と推定される.

母標準偏差は $\sqrt{930.6} = 30.5 \text{ 円}$ と推定される.

ここまで来たよ

1 略解:比率の点推定と区間推定

2 統計的仮説検定

- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布の母平均値に関する t 検定
- 2 項検定

推定と検定

点推定 μ はこの値と推定する

点推定 μ は値 1 と値 2 の間と推定する (信頼係数 95%で)

検定 μ は

(有意水準 5%で)

あるドーナツ製造器は、重さ X (確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという。しかし、5 個買って見たら、みんな軽めな感じ。これ、本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい)。

ある学習法を使ってるある生徒の、毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点。自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は …。自分の方法は と言いたい。

なぜ統計的仮説検定?

心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズが大きくできないことが多い.

ぎりぎりのデータから Yes/No のいちおうの結論を出す, 科学業界で合意された方法が

検定 (test) = **統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)**

真の母平均値は 55g と異なる, を **証明** したい.

しか~し, **≠ の証明はやりにくい** 54g である, ことが証明できれば十分だけど, 有限個の標本からはとうてい無理.

こういうときの常套手段は . 否定した命題「55g である」を仮定して **矛盾** を導く.

注意

以下, **証明**, **矛盾** は, 証明みたいなもの, 矛盾みたいなもの (統計的な, $\alpha = 5\%$ の確率で間違っている), です. この回の授業のローカル用語.

α : **有意水準**. どれだけの誤りを許すか. 大きいほど大胆/頼りない **証明**.

帰無仮説と対立仮説

- H_0 :**帰無仮説** (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値は 55g である」
- H_1 :**対立仮説** (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値は 55g でない」

H_0 と H_1 は否定の関係にある 2 つの命題だが、論理的にありえない第 3 のケースはあらかじめ除いておいてもよい。

例

$H_1: \mu > 0$ のとき、ふつうは $H_0: \mu \leq 0$ となるが、 μ が負の値を取りえないことが (統計的でなく確実に) わかっている場合、 としてよい。

棄却・採択・有意

H_0 から **矛盾** が導かれるとき,

- H_0 を **棄却** (reject) する
- (H_1 が **採択** (accept) される)
- 差が **有意である** (significant)

などという. H_1 が **証明** されたということ.

- H_0 を棄却できない
- H_0 を採用 (accept) する
- 差が **有意でない** (not significant) である

などという. このとき, H_1 でないことを **証明** できた **わけではない**

したケースに相当=標本は帰無仮説

と **矛盾** しない. 結論なし.

答案や論文での検定の書き方

- ① 有意水準を書く
- ② (検定の名前があれば) 「…検定」を行う, と書く
- ③ 帰無仮説を書く
- ④ 選択した検定統計量 Y と, それが (帰無仮説のもとで) 従う分布を書く
- ⑤ 標本に対する検定統計量の値 y_1 を書く.
- ⑥ Y が y_1 より極端な値となる確率を求める ($=p$). それが α より大きい/未満なら, 帰無仮説を採択する/棄却する ($=$ 有意でなかった/有意だった) と書く.

まあ最初のうちは, 参考書を見て, この状況ではこの検定, という解法パターンの対処でもやむをえないかも. ただし, 不適切な検定を無理に使わないようにしよう.

ここまで来たよ

1 略解:比率の点推定と区間推定

2 統計的仮説検定

- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布の母平均値に関する t 検定
- 2 項検定

正規分布の母平均値に関する t 検定

Quiz(母平均値の検定 (母分散未知)=t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_i g は, 母平均値が 57g であるはずだが, きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.

52g, 52g, 53g, 48g, 50g.

本当にドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ X_i g の母平均値は 57g なのだろうか. 有意水準 5% で統計的検定を行って判定しよう.

振り返ってまとめると

矛盾

⇔ ありそうにない (確率 α でしか起きない) 事象が起きた標本である

⇔ ある確率変数 Y が、標本で、確率 α でしか起きないくらい極端な値をとった

確率変数 Y : **検定統計量**. 計算しやすい, 自分の好きなものを選択してよいが, この場合はこう, という事典ができています.

「正規分布の母平均値に関する t 検定」「…の…検定」というのは, こういう状況ではこの検定統計量使え, という事典の記事.

過誤, 有意水準, 検出力

		真実	
		H_0 は真	H_0 は偽
判断	H_0 を棄却しない	正しい判断	第 2 種の過誤 (確率 β で起きる)
	H_0 を棄却	第 1 種の過誤 (確率 α で起きる)	正しい判断

$1 - \alpha$: 区間推定でいう に対応

p 値 (p -value): Y がこの標本よりも

棄却域 その Y の値なら仮説が棄却される, という Y の値の範囲.

採択域 棄却域の補集合.

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには, 9:00-10:00 に平均 196 人の客が来店することがわかっている. ドーナツ販売開始後の 4 日間, 来店客数は次の通りだった.

204, 208, 188, 200

ドーナツ販売開始後に来店客数は変化したか? 有意水準を 5% とする.

ここまで来たよ

1 略解:比率の点推定と区間推定

2 統計的仮説検定

- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布の母平均値に関する t 検定
- 2 項検定

2 項分布の母数 p に対する 2 項検定

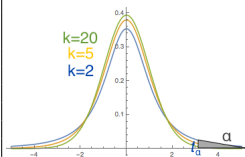
Quiz(2 項検定)

コインを 4 回投げたところ、すべて表だった。このコインは公平か？ 有意水準を 5% とする。

t 分布表

$\alpha = P(T > t_\alpha(k))$ となる, $t_\alpha(k)$ の値の表.

$k \backslash \alpha$	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.00025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
+∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291



連絡

- プチテストの添削済み答案返却しています。
 - **2015-01-17 土 4 補講** 第 1/2 セルラーニング室で e ラーニングから各自受講. <http://hig3.net> → RaMMoodle → 確率統計. 動画視聴のため各自でイヤフォンを用意してください. ただし, この日時場所でもなくとも,
 - ▶ 2015-01-10 土ごろ以降 (通知します), なるべく 2015-01-16 金 2 までに, 遅くとも 2015-01-21 木までに,
 - ▶ 自宅など好きな場所で
- 受講すればよいです. この内容の予習問題はなく, 直接にファイナルトライアルに出題します.
- 2015-01-16 金 2 臨時教室変更 1-542.
 - 2015-01-22 金 ファイナルトライアル 別紙出題計画参照
 - チューターは月火水木昼 (1-614).