連続型確率変数の例:一様分布・正規分布

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 I　L08(2018-11-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2018-11-14 Wed 14:34 JST hig"

今日の目標

- 一様分布の母期待値が求められる 前園確率統計 p.21,p.54
- 確率変数の変数変換の意味が説明できる 前園確率統計 p.21
- 正規分布の母平均値・母分散・確率が積分や表で求められる 前園確率統計 p.23,p.53

L07-Q1

Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率

1. $\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X\leq 5]}(X)] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \mathrm{I}_{[X\leq 5]}(()x) = \sum_{x=1}^{5} \frac{x}{55} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}.$
2. $\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x = \frac{\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10+1)(2\cdot 10+1)}{55} = \frac{385}{55} = 7.$
3. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sum_{x=0}^{10} \frac{x}{55} \cdot x^2 - 7^2 = 55 - 7^2 = 6.$

L07-Q2

Quiz 解答:連続的な値をとる確率変数

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{I}_{[X\geq\frac{1}{4}]}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{1/4}^{1/2} 8x\ \mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$$

2. $$\mathrm{E}[X] = \int_0^{1/2} f(x)\cdot x\ \mathrm{d}x = 1/3.$$

3. $$\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \tfrac{1}{8} - (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{72}.$$

4. $$\mathrm{E}[\tfrac{1}{\sqrt{X}}] = 2^{5/2}/3.$$

2 次元の連続型確率分布 前園確率統計 p.32

2 次元の確率密度関数 $f_{\mathrm{XY}}(x,y)$.

母期待値の定義 前園確率統計 p.50

離散型確率変数 $\mathrm{E}[v(X,Y)] = \sum_x \sum_y v(x,y) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y)$

連続型確率変数 $\mathrm{E}[v(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,y) \cdot f_{\mathrm{XY}}(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

X, Y が独立 $\Leftrightarrow f_{\mathrm{XY}}(x,y) = f_{\mathrm{X}}(x) f_{\mathrm{Y}}(y)$. 前園確率統計 p.34

公式群 前園確率統計

- 定理 3.1(1) $\mathrm{E}[aX+b]=a\mathrm{E}[X]+b.$
  - 一般に $\mathrm{E}[u_1(X)+u_2(X)]$ でも.
- 定理 3.1(2) $\mathrm{E}[aX+bY+c]=a\mathrm{E}[X]+b\mathrm{E}[Y]+c.$
  - 一般に $\mathrm{E}[v_1(X,Y)+v_2(X,Y)]$ でも.
- 定理 3.2(1) $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2$
- 定理 3.2(2) $\mathrm{V}[aX+b]=a^2\mathrm{V}[X]$
- 定理 3.3(1) $\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$
- 定理 3.3(2) $\mathrm{Cov}[aX,bY]=ab\mathrm{Cov}[X,Y]$
- 定理 3.3(4)1 独立なら $\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$
- 定理 3.3(4)3 独立なら $\mathrm{V}[X+Y]=\mathrm{V}[X]+\mathrm{V}[Y]$

ここまで来たよ

一様分布 前園確率統計 p.23

一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[c,d)$ の一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ に従う ($X \sim \mathrm{U}(c,d)$) という. ここで C は次で求める定数. 前園確率統計演習問題 2.1

$$f(x) = \begin{cases} C(\text{定数}) & (c \leq x < d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L08-Q1

Quiz(一様分布)

連続型確率変数 X が一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ にしたがう.

1. C を求めよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\sqrt{V[X]}$ を求めよう.

確率密度関数:質量密度, 質量=1, 母平均値: $\boxed{\quad\quad\quad}$, 力学母標準偏差: $\boxed{\quad\quad}$,

母分散: $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

ここまで来たよ

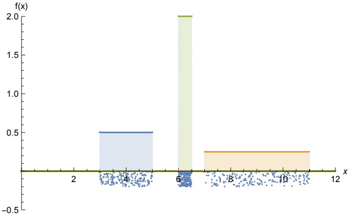
確率変数の 1 次変換 $Y = aX + b$ の意味 I

L08-Q2

Quiz(一様分布)

連続型確率変数 $Y \sim \mathrm{U}(3,5)$ に対して, $X = 2Y + 1$ を考える.

1. X のしたがう分布と確率密度関数 $f_X(x)$ を答えよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.



左から $Y \sim \mathrm{U}(3,5)$, $Z = \frac{1}{4}Y + \frac{21}{4}$, $X = 2Y + 1$.

ここまで来たよ

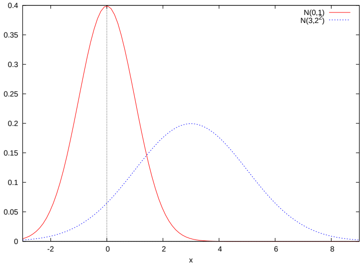
一般の正規分布 高校 数学 B 前園確率統計 p.23

正規=normal

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$ の確率密度関数

$$f(x; b, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}.$$

b, a^2:パラメタ



難しいので，まず $b = 0, a = 1$ の場合を考える．標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$
$z = \frac{x-b}{a}$ または $x = az + b$
$y = f(z; 0, 1)$ のグラフを，横に a 倍，横に b だけ平行移動して，縦に $1/\sqrt{a^2}$ 倍したものが $y = f(x; b, a^2)$

標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ の性質

標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ の確率密度関数

$$f(z;0,1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

$$\mathrm{E}[1] = 1,$$ 前園確率統計 p.23 微積分 II

$$\mathrm{E}[Z] = 0,$$ 奇関数

$$\mathrm{V}[Z] = 1$$ 前園確率統計 p.53 微積分 II

(累積) 分布関数 $\Phi(z)$ と上側確率 $Q(z)$

一般に, 確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型確率変数 X に対して, 前園確率統計 §2.3

$$\text{(累積) 分布関数 } F(a) = P(X < a) = \int \mathrm{I}_{[X<a]}(x)\, f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

意味: $\boxed{}$

$\mathrm{N}(0, 1^2)$ の場合は特に Φ という関数名.

$$\text{(累積) 分布関数 } \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z'; 0, 1^2)\mathrm{d}z'.$$

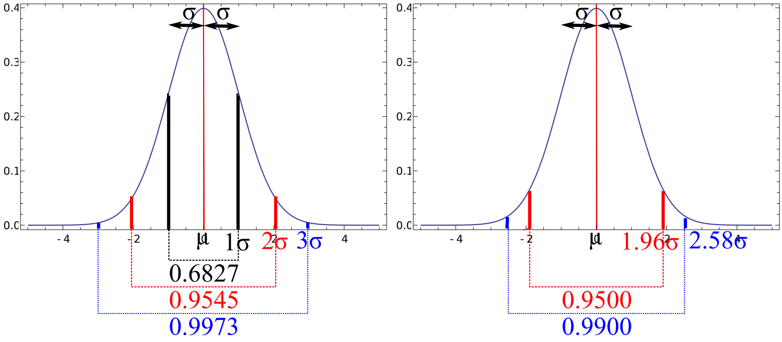
$$\text{上側確率 } Q(z) = P(Z > z) = 1 - \Phi(z) = \int_{z}^{\infty} f(z'; 0, 1^2)\, \mathrm{d}z'.$$

z' はもちろん導関数でなく z の親戚の積分変数.

上側確率 $Q(z)$ の数表 前園確率統計付表 1

- 単調減少. $Q(-\infty) = 1, Q(+\infty) = 0, Q(0) = \frac{1}{2}$.
- $f(z; 0, 1^2)$ が偶関数 $\rightsquigarrow$ $Q(-z) = 1 - Q(z)$ 前園確率統計演習問題 2.2

$\rightsquigarrow$ 確率 $P(c < z < d)$ は $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で表せる. $\rightsquigarrow$ $Q(z)$ の表 前園確率統計付表 1(p.167)



L08-Q3

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ に従う．$Z < -2$ となる確率を, $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で表し．また表から小数で求めよう．

L08-Q4

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ に従う連続型確率変数である．

1. 母期待値 $\mathrm{E}[Z^2]$ を求めよう．
2. 確率 $P(-0.56 < Z < +1.23)$ を $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で表し，表から小数で求めよう．

ふたたび一般の正規分布 $\mathrm{N}(b; a^2)$

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ に対して, $X = aZ + b$ を考える.

$$\mathrm{E}[1] = 1,$$ 前園確率統計 p.53 微積分 II

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[aZ + b] = b,$$ 前園確率統計 p.53

$$\sigma^2 = \mathrm{V}[X] = \mathrm{V}[aZ + b] = a^2,$$ 前園確率統計 p.53 微積分 II

$Z = \frac{X-b}{a}$. つまり X は一般の正規分布にしたがう.

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

前園確率統計 p.23 母平均値 $\mathrm{E}[X] = \mu$, 母分散 $\mathrm{V}[X] = \sigma^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は,

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

L08-Q5

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2 \cdot 3^2}}$$

にしたがう.

1. $f(x)$ のグラフを描こう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

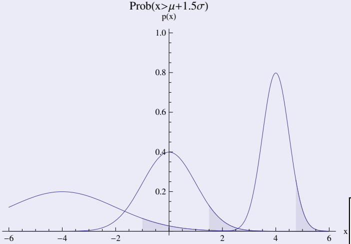
正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率の求め方 I

一般の正規分布の確率

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ のとき, $X = \sigma Z + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$P(c < X < d) = P(\frac{c-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{d-\mu}{\sigma}) = P(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z < \frac{d-\mu}{\sigma})$$

X に対応する $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ の範囲として考える.



L08-Q6

Quiz(正規分布の確率)

X が母平均値 3, 母分散 4 の正規分布にしたがうとする. 次を, $Q(z)$ (ただし $0 < z < +\infty$) で, さらに, 表を使って小数で書こう.

1. $X \geq 5$ となる確率
2. $+1 \leq X \leq 7$ となる確率

前園確率統計例題 2.2	前園確率統計演習問題 2.3

連絡

Moodle
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

Moodle モバイルアプリ
https://download.moodle.org/mobile

起動後, URL https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle を登録

- 次回 (プチテスト), 次々回は trial はありません.
- 予習復習問題を, 期限後も (再/初) 受験できます. 点数にはカウントしないけど, プチテスト準備に活用してね.
- Learn Math Moodle の予習復習問題は来週期限のものがあります. プチテストに備えてね.
- 課題 L04-2(Excel でやるやつ) はプチテスト出題計画にあり. 2018-11-08 木:再オープン, 2018-11-27 火:最終締切.
- 樋口オフィスアワー火昼 (1-539) 金 14:40-15:40(1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 特別研究履修 (=研究室配属) 説明会. 2 年生も歓迎 2018-11-21 水 4. 3-104.

プチテスト計画

プチテスト 2018-11-21 水．1-609 実習室．30 ピーナッツ．
以下の出題計画は最終的なものではありません．2018-11-15 木に修正，確定します．予習復習問題のりの PC(Moodle) による回答あり．Excel の使い方の問題は出題しません．

- データやグラフから平均値，分散，共分散，標準偏差，四分位数，四分位範囲などを求めその意味を解釈する (L02)
- データやグラフや平均値分散から標準得点，偏差値を求め，その意味を解釈する (文章題) (L03)
- データやグラフや平均値分散などから共分散，相関係数，回帰係数，回帰直線を求めその意味を解釈する (L04，課題 L04-2)
- 1 次元の離散型確率変数について，確率分布から確率，母期待値，母平均値，母分散，母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L05)
- 確率変数の 1 次式や 2 次式について，母平均値，母分散から，母平均値，母分散，母標準偏差を求める (L05,L06)
- 2 次元の離散型確率分布について，同時分布，周辺分布，母期待値，母分散，母共分散，独立性から母期待値，母共分散，母相関係数を求める (L06)
- 連続型確率変数について，確率密度関数から確率，母期待値，母平均値，母分散，母標準偏差を求める $\times n$ 問 (L07)
- 標準正規分布について，確率密度関数と数表から確率，母期待値，母平均値，母分散，母標準偏差を求める (L08) 一般の正規分布について，確率密度関数から母期待値，母平均値，母分散，母標準偏差を求める (L08)

おすすめの準備方法 出題範囲や方式は毎年変わるので，過去問題 (公開) 中心の準備はおすすめしません．上の出題計画を参照して，今年度の trial，チーム課題，そのフィードバック，予習復習問題を中心に準備することをおすすめします．Learn Math Moodle の予習復習問題は，点数はこれまでの最高点で固定されてますが，練習のための再受験が可能です．

Wolfram Alpha による定積分

Web で Wolfram Alpha で検索 か
`https://www.wolframalpha.com`
Google Play, AppStore に安価な有料版アプリもあります.

定積分で, 確率変数の確率や母期待値を検算しよう.
$\int_0^2 \frac{1}{4}x^2 \, \mathrm{d}x$ = `int(1/4*x^2,x=0..2)`
$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$ = `int(1/sqrt(2pi)*exp(-x^2/2),x=0..infinity)`
区分的に (場合分けで) 定義される関数は, 人間が複数の区間の積分の和に書き直して与えるほうが簡単.