確率統計☆演習 II プチテスト

樋口さぶろお [1]　配布: 2015-05-29 Fri 更新: Time-stamp: "2015-06-19 Fri 07:44 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

前半 6 問 (後半 4 問)

1

過程不要

離散型確率変数 X, Y の同時分布 $P(X=x, Y=y)$ は次の表で与えられる.

$y\backslash x$	2	3
2	3/12	1/12
3	4/12	4/12

1. X, Y の周辺分布を求めよう.
2. 条件付き確率 $P(Y=2|X=3)$ を求めよう.

2

過程不要

確率変数 $X_1, \dots, X_{100}$ は $\mathrm{E}[X_i]=3, \mathrm{V}[X_i]=7$ の独立同分布に従う.

$n=100$ が大きいと思うと, 次はそれぞれ, 近似的にどのような分布に従うか, '母平均値が$\boxed{}$, 母分散が$\boxed{}$の$\boxed{}$分布' のように答えよう.

1. 確率変数 $A=\frac{1}{100}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{100})$
2. 確率変数 $B=\frac{1}{10}(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{100}-100\cdot 3)$

3

過程不要

独立な離散型確率変数 X, Y がある. 同時分布 $P(X=x, Y=y)$ は次の表で与えられる. 実数 a, b を定めよう. "?" の値は表示していないが, 答える必要はない.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

$y\backslash x$	3	4	計
3	a	$\frac{2}{10}$	?
4	b	?	?
計	?	$\frac{7}{10}$	?

4

確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ に従う.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (0 \leq x < \sqrt{2}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.
2. 確率 $P(X \leq \frac{1}{2})$ を求めよう.

5

連続型確率変数 X は次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (1 \leq x < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

X のモーメント母関数 $M_X(\lambda)$ を求めよう.

6

連続型確率変数 X は次のモーメント母関数を持つ.

$$M_X(\lambda) = \frac{1}{1-2\lambda}$$

1. $\mathrm{E}[X^1]$ を求めよう.
2. $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.

確率統計☆演習 II プチテスト

樋口さぶろお [2] 配布: 2015-05-29 Fri 更新: Time-stamp: "2015-06-19 Fri 07:44 JST hig"

(前半 6 問) 後半 4 問

7

独立な確率変数 X, Y は下の確率に従う.

$$P(X=x)=\begin{cases}0.1 & (x=1)\\ 0.3 & (x=2)\\ 0.6 & (x=3)\\ 0 & (\text{他})\end{cases},\quad P(Y=y)=\begin{cases}0.2 & (y=5)\\ 0.8 & (y=7)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

確率変数 $T=X+Y$, $S=X\times Y$ を考える.

1. 確率 $P(T=8)$ を求めよう.
2. $\mathrm{E}[S]$ を求めよう.

8

抽選用の袋に何個かの色つきボールが入っている. ボールを割ると, 中に当たり外れの記された紙が入っている.

当たりのボールのうち赤いボールが $\frac{1}{10}$, 白いボールが $\frac{9}{10}$ である.

外れのボールのうち赤いボールが $\frac{7}{10}$, 白いボールが $\frac{3}{10}$ である.

最初に, 色は気にせず当たり外れだけ考えると, 当たりの確率は $\frac{2}{10}$ くらいかなと思っていた (事前確率).

無作為にボールを取り出したところ, 赤いボールだった. このとき, 外れである確率 (事後確率) はどれだけと思えるかを答えよう.

過程として同時確率の表を書くのを歓迎します.

9

確率変数 X,Y は独立で, $\mathrm{E}[X]=2, \mathrm{V}[X]=3, \mathrm{E}[Y]=10, \mathrm{V}[Y]=30$ を満たす.

1. $\mathrm{E}[4X+7Y+3]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[2X-Y]$ を求めよう.
3. $\mathrm{E}[X^2Y]$ を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

10

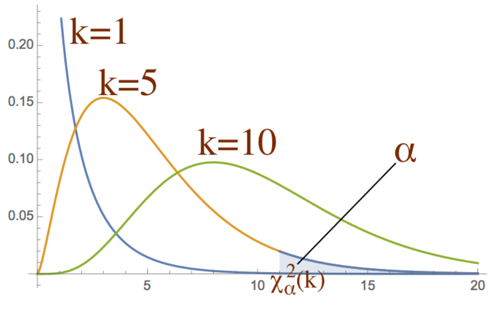
　ある小学校の小学生から 24 人を標本抽出し, 男の子か女の子か, 右利きか左利きかで分類すると, 度数 (人数) は下の表のようになった.

	男の子	女の子
左利き	2	4
右利き	14	4

1. ピアソンの χ^2 を求めよう.
2. 独立性の検定を行ったとき, 信頼係数 $\alpha = 0.05$ (5%) で,「性別と利き手は関係ない」という帰無仮説は棄却できるか, 根拠となる大小関係とともに答えよう (仮説検定の手続きをすべて記述する必要はない).

χ^2 **分布表** $\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(k))$.

$k\backslash\alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00003927	0.0001571	0.0009821	0.003932	0.01579	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.07172	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2



確率統計☆演習 II プチテスト略解

樋口さぶろお[3] 配布: 2015-05-29 Fri 更新: Time-stamp: "2015-06-19 Fri 07:44 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. 参加者はすべての過程を記す必要があります.

配点 1-10:各 10 点, 計 100 点

1

1.

$$P(X=x)=\begin{cases}7/12 & (x=2)\\ 5/12 & (x=3)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}, \qquad P(Y=y)=\begin{cases}4/12 & (y=2)\\ 8/12 & (y=3)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

2. $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{4}{12}}=\frac{1}{5}$.

配点 1:各 3 点, 2:4 点, 計 10 点

2

独立同分布にしたがう多数の確率変数の和なので, 近似的に正規分布にしたがう. 母平均値と母分散は, $\mathrm{E}(aX+bY+c)$, 独立分布の $\mathrm{V}(aX+bY+c)$ の式を繰り返し使えば求められる.

1. A は母平均値が 3, 母分散が $\frac{7}{100}$ の正規分布 $\mathrm{N}(3,\frac{7}{100})$ に従う.
2. B は母平均値が 0, 母分散が 7 の正規分布 $\mathrm{N}(0,7)$ に従う.

配点 1,2:各 5 点, 計 10 点

3

$a=\frac{6}{70}, b=\frac{15}{70}$.

配点 条件式各 3 点, 結果 4 点, 計 10 点

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

1. $\int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{64}$.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点

5

$$
\begin{aligned}
M_X(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} f(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \mathrm{e}^{\lambda x} \times \tfrac{1}{2} \, \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{\mathrm{e}^{3\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda}}{2\lambda}.
\end{aligned}
$$

配点　計 10 点

6

1. $\mathrm{E}[X] = M_X'(0) = 2$.
2. $\mathrm{E}[X^2] = M_X''(0) = 8$.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点

7

1. $P(X + Y = 8) = 0.1 \times 0.8 + 0.6 \times 0.2 = 0.2$.
2. $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] = 2.5 \times 6.6 = 16.5$.

$\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} x \times y \times P(X = x, Y = y)$ で 3×2 項の和を考えてもいいが, 上のようにやったほうが楽 (特に, X, Y の値の種類が多いときには).

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点

8

当外 \ 色	赤	白	計
あたり	2/100	18/100	2/10
はずれ	56/100	24/100	8/10

$$
\begin{aligned}
&P(\text{当外}=\text{はずれ} \mid \text{色}=\text{赤}) \\
=&\frac{\frac{7}{10}\frac{8}{10}}{\frac{1}{10}\frac{2}{10}+\frac{7}{10}\frac{8}{10}} \\
=&\frac{56}{58} = \frac{28}{29}
\end{aligned}
$$

配点　同時分布の表 5 点, 事後確率 5 点, 計 10 点

9

1. $\mathrm{E}[4X + 7Y + 3] = 4\mathrm{E}[X] + 7\mathrm{E}[Y] + 3 = 81.$
2. $\mathrm{V}[2X - Y] = 2^2\mathrm{V}[X] + (-1)^2\mathrm{V}[Y] = 42.$
3. $\mathrm{E}[X^2Y] = \mathrm{E}[X^2] \times \mathrm{E}[Y] = (\mathrm{V}[X] + \mathrm{E}[X]^2) \times \mathrm{E}[Y] = 70.$

配点　1:4 点, 2,3:各 3 点, 計 10 点

10

1. 期待度数は

	男の子	女の子	計
左利き	4	2	6
右利き	12	6	18
計	16	8	24

$$\chi^2 = \frac{2^2}{4} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^2}{12} + \frac{2^2}{6} = 4.$$

2. $\chi_{0.05}(1) = 3.841$ と比較して, 帰無仮説は棄却される.

配点　1 期待度数:2 点, 1χ^2:3 点, 2 比較対象の χ^2:2 点, 2 結論:3 点, 計 10 点