確率統計☆演習 II ファイナルトライアル

樋口さぶろお [1] 配布: 2015-07-31 Fri 更新: Time-stamp: "2015-08-06 Thu 15:56 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

あるドーナツチェーンの「ドーナツパック」は, 確率 0.3 でドーナツ 8 個入り, 確率 0.7 でドーナツ 6 個入りである. 「ドーナツパック」を 10 パックを買ったときに得られるドーナツの個数を確率変数 X とする.

母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.

2

あるいかさまコインは, 表が出る確率が $p = 0.1$ である. このコインを繰り返し投げたときに, 初めて表がでるのが $X = k$ 回目とする. つまり, $k-1$ 回連続裏, k 回目で初めて表とする ($k = 1, 2, 3, \dots$).

1. 確率 $P(X = 3)$ を求めよう.
2. X の母平均値を求めよう.

3

あるドーナツ製造マシンは週 7 日 24 時間連続で稼働しているが, 時間に比例する頻度で故障し, 個々の故障は独立に起きる. 平均すると 4 週間に 2 回の割合で故障する.

1. ある 1 週間に故障する回数の母分散を求めよう.
2. ある 1 週間にちょうど 2 回だけ故障する確率を求めよう.
3. あるとき, この機械が故障した. その時点からカウントして, 次の故障が起きるまでの期間の母平均値を求めよう.
4. あるとき, この機械が故障した. その時点からカウントして, 1 日以内に次の故障が発生する確率を求めよう.

指数関数などを小数に直したり, 小数を整理したりしなくてよい.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

過程不要

1. X_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ を標準正規分布にしたがう独立な確率変数とする．$\mathrm{E}[X_1^2 + \cdots + X_{10}^2]$ を求めよう．
2. Y を自由度 5 のカイ 2 乗分布にしたがう連続型確率変数とする．$P(Y < a) = 0.95$ となる a の値を求めよう．

5

過程不要

あるドーナツ製造マシンが製造するドーナツの重さ Xg は, 母平均値 μ , 母分散 σ^2 の正規分布にしたがう確率変数である．このマシンが製造した $n = 9$ 個のドーナツからなる標本について, 標本平均値は 52g, 不偏標本分散は $36\mathrm{g}^2$ だった．

実数 (小数) の加減乗除平方根は計算しないまま残してよい．

1. 母平均値 μ を, t 分布を用いて, 信頼係数 0.99 で区間推定しよう．
2. 母分散 σ^2 を, カイ 2 乗分布を用いて, 信頼係数 0.95 で区間推定しよう．

6

ドーナツ製造マシン 1 号,2 号が製造するドーナツの重さ X, Y g は, 未知の母平均値 a, b の独立同分布にしたがう確率変数である．母分散も未知だが, 1 号と 2 号で等しいことがわかっている．

1 号,2 号で製造したドーナツの重さは次のようだった．

1 号: $51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, 50\mathrm{g}, 50\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$

2 号: $55\mathrm{g}, 56\mathrm{g}, 51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 56\mathrm{g}.$

1. $\overline{X}, \overline{Y}$, 合併した標本分散 S^2 を求めよう．
2. 母平均値の差 $a - b$ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう (分数や平方根は計算しなくてよい)．

7

過程不要

7.1

1 個の母集団のばらつきの程度が予想通りかどうかを判定する検定は次のどれか, **正しいものの番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 平均値の差の検定
2. 比率の検定
3. カイ 2 乗検定
4. t 検定

7.2

2 標本 t 検定を行って, 「右利きの日本人と左利きの日本人の身長の母平均値は異なる」ことを示したい. 帰無仮説として**正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 右利きの日本人の身長の母平均値と左利きの日本人の身長の母平均値との差は 0cm である
2. 右利きの日本人の身長の母平均値は, 左利きの日本人の身長の母平均値よりも高い
3. 右利きの標本の身長の標本平均値は, 左利きの標本の身長の標本平均値と等しい
4. 右利きの標本の身長の信頼区間の中に, 左利きの標本の標本平均値がはいる

7.3

標本が与えられたときの母平均値の区間推定について, **正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. 不偏標本分散が小さいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
2. 信頼係数が大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
3. 標本サイズが小さいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる
4. 標本平均値が大きいほど, 信頼区間は小さく (短く) なる

7.4

ある母集団から, サイズ n の標本を抽出し, 標本平均値を求めることを繰りかえす. n は大きいとする. 一般に**正しい文の番号を 1 つだけ**答えよう.

1. どんな母集団でも, 標本平均値は, 近似的に, 母集団と同じ分布に従う
2. どんな母集団でも, 標本平均値は, 確率変数を 1 次式で変換すると, 近似的に, 標準正規分布に従う
3. どんな母集団でも, 標本平均値は, 確率変数を 1 次式で変換すると, 近似的に, カイ 2 乗分布に従う
4. どんな母集団でも, 標本平均値は, 確率変数を 1 次式で変換すると, 近似的に, ポアソン分布に従う

確率統計☆演習 II ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお [2] 配布: 2015-07-31 Fri 更新: Time-stamp: "2015-08-06 Thu 15:56 JST hig"

配点 1,2,4:各 10 点,3:20 点,5:24 点,6:14 点,7:12 点 計 100 点.

1

$Y \sim \mathrm{B}(0.3, 10)$ とすると, $X = 60 + 2Y$. よって, $\mathrm{E}[X] = 60 + 2\mathrm{E}[Y] = 66$.

別解. 10 パックそれぞれに入っているドーナツの個数を確率変数 X_i とすると, X_i は互いに独立で, 同分布にしたがう. $\mathrm{E}[X_i] = 6.6$ なので, $\mathrm{E}[X] = \sum_i \mathrm{E}[X_i] = 66$.

配点 10 点.

講評 確率変数 Y とか導入する人は定義を書き, 過程として, 何分布にしたがうか書きましょう.

2

1. $P(X = 3) = (1-p)^2 p = 0.9^2 \times 0.1$.
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p} = 10$.

配点 1,2:各 5 点, 計 10 点.

3

1. 週当たりの回数 X は, パラメタ $\alpha = 0.5$ のポアソン分布にしたがう. よって, $\mathrm{V}[X] = \alpha = 0.5$ 回^2.
2. $P(X = 2) = \frac{0.5^2}{2!}\mathrm{e}^{-0.5}$.
3. 次の故障までの期間を Y 週とすると, Y はパラメタ 0.5 の指数分布にしたがう. よって, $\mathrm{E}[Y] = 1/(2/4) = 2$ 週 $= 14$ 日.
4. $\int_0^{1/7} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}\mathrm{d}y = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{14}}$.

配点 1,2,3,4:各 5 点, 計 20 点.

講評 2,4 は確率だから単位はない. 1 は回数だから単位はない. 3 については, 期間と言っているだけなので, 2 というだけの答では, 2 日なのか, 2 週間なのか, 2 時間なのかわからないのでは?

過程として, X, Y が何分布にしたがうか書きましょう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

1. $Y = X_1^2 + \cdots + X_{10}^2$ は自由度 10 のカイ 2 乗分布にしたがうので, $\mathrm{E}[X_1^2 + \cdots + X_{10}^2] = 10$. これは, $\mathrm{E}[Y] = 10\mathrm{E}[X^2] = 10(\mathrm{V}[X] + \mathrm{E}[X])$ からもわかる.
2. 表で, $\alpha = 0.05, k = 5$ の位置を見て, $a = 11.07$.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

5

1. $\frac{\bar{X}-\mu}{S^2/n}$ は自由度 $n-1$ の t 分布に従う. よって, 信頼係数 0.99 の信頼区間は, g を単位として

$$\begin{aligned} 52 - t_{0.005}(9-1) \times \sqrt{36/9} <& \mu < 52 + t_{0.005}(9-1) \times \sqrt{36/9} \\ 52 - 3.355 \times 2 <& \mu < 52 + 3.355 \times 2 \\ 45.29 <& \mu < 58.71 \end{aligned}$$

2. 不偏標本分散 $(9-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ は自由度 $9-1$ のカイ 2 乗分布に従う. よって, 信頼係数 0.95 の信頼区間は, g^2 を単位として

$$\begin{aligned} \frac{(9-1)\cdot 36}{\chi^2_{0.025}(8)} <& \sigma^2 < \frac{(9-1)\cdot 36}{\chi^2_{0.975}(8)} \\ \frac{(9-1)\cdot 36}{17.53} <& \sigma^2 < \frac{(9-1)\cdot 36}{2.180} \\ 16.43 <& \sigma^2 < 132.1 \end{aligned}$$

配点　1,2:各 12 点, 計 24 点.

6

1. $\overline{X} = 50, \overline{Y} = 54$. $S^2 = \frac{1}{6+5-2}[(51-50)^2 + \cdots + (55-54)^2 + \cdots] = \frac{1}{8}[14 + 22] = 4$.
2.

$$\begin{aligned} (50-54) - t_{0.025}(9)\sqrt{4\cdot(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{5})} < a - b <& (50-54) + t_{0.025}(9)\sqrt{4\cdot(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{5})} \\ (50-54) - 2.262\sqrt{4\cdot(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{5})} < a - b <& (50-54) + 2.262\sqrt{4\cdot(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{5})} \end{aligned}$$

配点　1:6 点, 2:8 点, 計 14 点.

7

7.1

3

7.2

1

7.3

1

7.4

2

配点 1,2,3,4:各 3 点, 計 12 点.