確率変数の独立性

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L02(2015-04-17 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-04-24 Fri 13:27 JST hig"

今日の目標

- 2 次元の離散型/連続型確率変数の同時分布が与えられたとき, 独立かどうか判定できる.
- 2 次元の離散型/連続型確率変数が独立である, 独立でないときに, 複雑な関数の期待値を簡単化できる.

http://hig3.net

L01-Q1
Quiz 解答:多次元の確率変数の期待値

- $\mathrm{E}[X^3Y] = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^3 \mathrm{d}y \frac{1}{18}(xy^2)(x^3y) = \frac{36}{5}$.
- $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X<1,Y<2]}(X,Y)] = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^2 \mathrm{d}y \frac{1}{18}(xy^2) \cdot 1 = \frac{2}{45}$.

L01-Q2
Quiz 解答:多次元の確率変数の期待値

1. $\mathrm{E}[X+2Y] = 0\cdot(1+2\cdot 0) + \frac{2}{12}(2+2\cdot 0) + \frac{1}{12}(3+2\cdot 0) + \frac{4}{12}(1+2\cdot 2) + 0(2+2\cdot 3) + \frac{5}{12}(3+2\cdot 4) = \frac{62}{12}$.
2. $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[Y\geq 1]}(X,Y)] = 0\cdot 0 + \frac{2}{12}\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot 0 + \frac{4}{12}\cdot 1 + 0\cdot 0 + \frac{5}{12}\cdot 1 = \frac{9}{12}$.

3

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 4/12 & (x=1) \\ 2/12 & (x=2) \\ 6/12 & (x=3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \qquad f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 3/12 & (y=0) \\ 9/12 & (y=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- 3. は正解者が少なかったですが, 表の周辺に出てくる小計を, L01 p.10 にでてくるような $f(x)$ の形式で答えろってことですよね.
- x, y 両方の和をとって, $f(x) =$ 定数, みたいな答になってる人もいましたが, 周辺分布は, トレーディングカードのこの体重が出る確率はこれ, ってやつだから, 数 1 個になっちゃうのはへんでしょ.
- 言い忘れてたけど, $f_{\mathrm{X}}(x), f_{\mathrm{Y}}(x)$ の大文字 X,Y は, どっちの変数か区別するためについてる添字なので, ここには (一般に大文字には) 値を代入しません. 物理数学で, $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ の t には時刻を代入するけど, x, y, z には座標の値を代入しないでしょ.

L02-Q1

Quiz(連続型確率変数の独立性)

2 次元の連続型確率変数 (X, Y) を考える．確率密度関数 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次で与えられる．

$$f_{\mathrm{XY}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{18}xy^2 & (0 \leq x < 2, 0 \leq y < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 周辺分布 $f_{\mathrm{X}}(x)$, $f_{\mathrm{Y}}(y)$ を求めよう．
2. $\mathrm{E}[X]$,$\mathrm{E}[3X+2]$,$\mathrm{E}[2X+Y]$ を求めよう．
3. X, Y は独立かどうか答えよう
4. $\mathrm{E}[X^2Y]$ を $\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[X^2], \mathrm{E}[Y], \mathrm{E}[Y^2]$ で書こう．
5. $\mathrm{V}[X+3Y]$ を $\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[X^2], \mathrm{E}[Y], \mathrm{E}[Y^2]$ で書こう．

X, Y が独立であってもなくても成立する性質

X, Y は確率変数, a, b は定数.

$$\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X]+b \tag{2.1}$$
$$\mathrm{E}[a\phi(X)+b] = a\mathrm{E}[\phi(X)]+b \tag{2.2}$$
$$\mathrm{V}[aX+b] = a^2\mathrm{V}[X] \tag{2.3}$$

$$\mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f_{\mathrm{X}}(x)\, \mathrm{d}x \tag{2.4}$$
$$\mathrm{E}[\phi(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) f_{\mathrm{Y}}(y)\, \mathrm{d}y \tag{2.5}$$

$$\mathrm{E}[g(X,Y)+h(X,Y)] = \mathrm{E}[g(X,Y)] + \mathrm{E}[h(X,Y)] \tag{2.6}$$

$$\text{特に } \mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] \tag{2.7}$$

独立性の定義

独立性

確率変数 X, Y が同時分布 $f(x, y)$ または同時確率密度関数 $f(x, y)$ を持つとする.
X, Y が独立とは,

$$f(x, y) = f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y) \quad (2.8)$$

が成立することをいう (世の中には, 同値な定義が多数).

独立とは, X,Y の値が互いに無関係であること

L02-Q2

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y \backslash x$	2	4
2	1/2	0
4	0	1/2

1. X, Y は独立かどうか判定しよう.
2. $\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[Y], \mathrm{E}[XY]$ を求めよう.

L02-Q3

Quiz(離散型確率変数の独立性)

次の確率密度関数のうち, x, y が独立でないものは? ただし, $a \leq x < b, c \leq y < d$ の外では $f(x,y) = 0$ とする.

1. $f(x,y) = (x+1) \times y$
2. $f(x,y) = x^2 - y^2$
3. $f(x,y) = xy + 3x + 2y + 6$
4. $f(x,y) = 2^{x-y}$
5. $f(x,y) = x^2/y$

X, Y が独立であるとき ‘だけ’ 成立する性質

X, Y は確率変数, g, h は任意関数

X, Y が独立であるとき ‘だけ’ 成立する性質

$$\mathrm{E}[g(X) \times h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)] \times \mathrm{E}[h(Y)] \tag{2.9}$$

$$\text{特に } \mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] \tag{2.10}$$

$$\mathrm{V}[X + Y] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y] \tag{2.11}$$

L02-Q4

Quiz(連続型確率変数の独立性)

2 次元の連続型確率変数 (X, Y) を考える. X, Y は独立であり, 周辺分布は次で与えられる

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & (0 \leq y < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sinh(1)}\mathrm{e}^x & (-1 \leq x < +1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. $\mathrm{E}[\mathrm{e}^X Y^3]$ を求めよう.
2. $\mathrm{E}[Y + Y^3]$ を求めよう.

L02-Q5

Quiz(離散型確率変数の独立性)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える. 同時分布 $f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる (現れない X, Y の確率は zero である).

$y \backslash x$	2	3
3	2/12	1/12
7	A	B

X, Y が独立になるように, 実数 A, B を定めよう.