条件付き確率とベイズの公式

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L03(2015-04-24 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-04-30 Thu 18:05 JST hig"

今日の目標

- 同時分布から条件付き分布が求められる
- ベイズの公式を使って確率を計算できる.

http://hig3.net

L02-S1

Quiz 解答:連続型確率変数の独立性

1. $f_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (0 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}, \quad f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{9}y^2 & (0 \leq y < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{8}{3}$,$\mathrm{E}[3X+2] = 10$,$\mathrm{E}[3X+Y] = 10 + \frac{81}{36}$.
3. 独立である.
4. X, Y は独立なので, $\mathrm{E}[X^2Y] = \mathrm{E}[X^2]\mathrm{E}[Y]$.

L02-S3

Quiz 解答:離散型確率変数の独立性

確率の和は 1 なので, $\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+A+B=1$.
よって,

$$f_{\mathrm{Y}}(y)=\begin{cases}\frac{3}{12} & (y=3)\\ \frac{9}{12} & (y=7)\end{cases}$$

独立性から,

$$\begin{aligned}f(2,3)=&f_{\mathrm{X}}(2)\frac{3}{12}=\frac{2}{12},\\ f(3,3)=&f_{\mathrm{X}}(3)\frac{3}{12}=\frac{1}{12},\\ f(2,7)=&f_{\mathrm{X}}(2)\frac{9}{12}=A,\\ f(3,7)=&f_{\mathrm{X}}(3)\frac{9}{12}=B.\end{aligned}$$

$A, B, f_{\mathrm{X}}(2), f_{\mathrm{X}}(3)$ を未知数として解くと, $A=\frac{6}{12}$, $B=\frac{3}{12}$.

(復習) 独立性

(X, Y) が独立とは $f_{\mathrm{XY}}(x, y) = f_{\mathrm{X}}(x) \times f_{\mathrm{Y}}(y)$.

X, Y が独立であるとき 'だけ' 成立する性質

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[g(X) \times h(Y)] =& \mathrm{E}[g(X)] \times \mathrm{E}[h(Y)] && (2.1)\\
\text{特に } \mathrm{E}[XY] =& \mathrm{E}[X] \times \mathrm{E}[Y] && (2.2)\\
\mathrm{V}[X+Y] =& \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y] && (2.3)
\end{aligned}
$$

ここまで来たよ

1. 略解: 確率変数の独立性
2. 条件付き確率とベイズの公式
   - 条件付き確率
   - ベイズの公式

同時確率と周辺確率 (復習)

- 同時分布 $P(X = x, Y = y)$.
  - 意味 $X = x$ かつ $Y = y$
  - 性質
$$\sum_{x,y} P(X = x, Y = y) = 1 \tag{3.4}$$
.
- 周辺分布 $P(X = x), P(Y = y)$.
  - 定義
$$P(X = x) = \sum_{y} P(X = x, Y = y), \tag{3.5}$$
$$P(Y = y) = \sum_{x} P(X = x, Y = y) \tag{3.6}$$
.
  - 意味 Y は問わず $X = x$, X は問わず $Y = y$.
  - 性質
$$\sum_{x} P(X = x) = 1, \qquad \sum_{y} P(Y = y) = 1 \tag{3.7}$$

条件付き確率 $P(X=x|Y=y)$, $P(Y=y|X=x)$

- 定義 (同時確率と周辺確率の比)

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}, \tag{3.8}$$

$$P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}. \tag{3.9}$$

- 意味　条件 $Y=y$ のもとで $X=x$, 条件 $X=x$ のもとで $Y=y$.
- 性質 1 $\sum_x P(X=x|Y=y)=1, \sum_y P(Y=y|X=x)=1$.
- 性質 1' $\sum_y P(X=x|Y=y)\neq 1, \sum_x P(Y=y|X=x)\neq 1$.
- 性質 2 定義を通分して, 両辺に $\sum_y$ すると,

$$P(X=x|Y=y)P(Y=y) = P(X=x, Y=y) \tag{3.10}$$

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x|Y=y)P(Y=y) \tag{3.11}$$

L03-Q1

Quiz(条件付き分布)

2 次元の離散型確率変数 (X, Y) を考える．同時分布 $P(X=x, Y=y) = f_{\mathrm{XY}}(x, y)$ は次の表で与えられる．

$y \backslash x$	2	3
3	2/12	1/12
7	5/12	4/12

1. 周辺分布 $P(X=x), P(Y=y)$ を求めよう．
2. 条件付き分布 $P(X=x|Y=3), P(Y=y|X=3)$ を求めよう．

独立のときの条件付き確率

X, Y が独立のとき任意の y に対して,

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = P(X = x) \tag{3.12}$$

X, Y が独立のとき, X の条件付き確率は Y の値によらない. 周辺確率とも同じ.

ここまで来たよ

1. 略解: 確率変数の独立性
2. 条件付き確率とベイズの公式
   - 条件付き確率
   - ベイズの公式

ベイズの公式

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(Y=y|X=x)P(X=x)}{\sum_x P(Y=y|X=x)P(X=x)}. \tag{3.13}$$

$$P(Y=y|X=x)=\frac{P(X=x|Y=y)P(Y=y)}{\sum_y P(X=x|Y=y)P(Y=y)}. \tag{3.14}$$

$P(X=x|Y=y)$ を $P(Y=y|X=x)$ で書き表す式, およびその逆の式.

L03-Q2

Quiz(ベイズの公式)

確率変数 X は値 $x = 1, 2$, 確率変数 Y は値 $y = 10, 20$ をとる.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (x = 1) \\ \frac{1}{4} & (x = 2) \end{cases}$$

$$P(Y = y | X = 1) = \begin{cases} \frac{7}{10} & (y = 10) \\ \frac{3}{10} & (y = 20) \end{cases}$$

$$P(Y = y | X = 2) = \begin{cases} \frac{2}{5} & (y = 10) \\ \frac{3}{5} & (y = 20) \end{cases}$$

とする.

1. 同時確率を求めて表に書こう.
2. $P(X = x | Y = 10)$ を求めよう.

ベイズ的な考え方

$$\boxed{\text{事後確率 } P(X=x|Y=y)} \longleftarrow \boxed{\text{事前確率 } P(X=x)}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\text{情報 } Y=y}$$

主観確率

ベイズの定理=ベイズの公式 (+ニュアンス?)

L03-Q3

Quiz(ベイズの公式)

外見で区別できない, 品種 1(甘い) と品種 2(渋い) の柿がかごに入っている.
品種 1 は, 確率 0.95 で赤に, 確率 0.05 で黄色になる.
品種 2 は, 確率 0.125 で赤に, 確率 0.875 で黄色になる.
確率変数 X, Y を用いて, 品種 1(甘い) を $X = 1$, 品種 2(渋い) を $X = 2$, 赤いを $Y = 10$, 黄色いを $Y = 20$ と表現する.

1. 問題文から $P(Y = y|X = x)$ を読み取ろう.
2. かごの柿の $1/5$ が甘い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 赤い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した赤い柿が甘い確率 $P(X = 1|Y = 10)$ を求めよう.
3. 仮にかごの柿の $1/5$ が渋い柿であるとする. いま, 無作為に 1 個の柿を取りだしたところ, 黄色い柿だった. ベイズの公式を使って, 取り出した黄色い柿が渋い確率を求めよう.

- 統計検定を取ろう! http://www.toukei-kentei.jp/
  1. 2 級 or 3 級をお奨めします
  2. 2015-05-15 申込締切, 2015-06-21 検定実施

manaba 出席カード提出
https://attend.ryukoku.ac.jp