モーメント母関数と中心極限定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L06(2015-05-15 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-05-16 Sat 09:04 JST hig"

今日の目標

- 確率関数, 確率密度関数からモーメント母関数を計算できる
- モーメント母関数から, 母平均値, 母分散, モーメントを計算できる
- 中心極限定理の主張と証明方法を説明できる

http://hig3.net

大数の (弱) 法則の証明 I

$\overline{X}_{(n)}$ に対して, 母平均値は $\mu_n = \mu$, 母分散は $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.
$\overline{X}_{(n)}$ に対して, $a = \epsilon/\sigma_n = \epsilon\sqrt{n}/\sigma$ でチェビシェフの不等式を適用すると,
$P(|\overline{X}_{(n)} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \to 0(n \to \infty)$
すなわち, $\overline{X}_{(n)}$ は μ に確率収束する.

L05-S1

Quiz 解答:チェビシェフの不等式の正規分布への適用例

$$P(|X-\mu| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

で,

$$\begin{aligned}
左 =&0.1587 \times 2, \quad 右 = 1 \quad (a=1)\\
左 =&0.0228 \times 2, \quad 右 = \tfrac{1}{4} \quad (a=2)\\
左 =&0.0013 \times 2, \quad 右 = \tfrac{1}{9} \quad (a=3)
\end{aligned}$$

L05-S2

Quiz 解答:ベイズの公式

当落＼色	赤	白	計
当たり	1/12	2/12	3/12
外れ	4/12	5/12	9/12
計	5/12	7/12	1

P(当落=あたり | 色=赤)

$$= \frac{\text{P(色=赤 | 当落=あたり)P(当落=あたり)}}{\text{P(色=赤 | 当落=あたり)P(当落=あたり)+P(色=赤 | 当落=はずれ)P(当落=はずれ)}} = \frac{1}{5}$$

L05-S3

Quiz 解答:ベイズの公式

1.

$$P(Y=y|X=1)=\begin{cases}0.95 & (y=10)\\ 0.05 & (y=20)\end{cases}$$

$$P(Y=y|X=2)=\begin{cases}0.125 & (y=10)\\ 0.875 & (y=20)\end{cases}$$

2.

$y \backslash x$	1	2
10	0.19	0.10
20	0.01	0.70

$$P(X=1|Y=10) = \frac{P(Y=10|X=1)P(X=1)}{\sum_x P(Y=10|X=x)P(X=x)} = \frac{0.95\times 0.2}{0.95\times 0.2 + 0.125\times 0.8} = \frac{19}{29}.$$

3.

$$P(X=2|Y=20) = \frac{P(Y=20|X=2)P(X=2)}{\sum_x P(Y=20|X=x)P(X=x)} = \frac{0.875\times 0.2}{0.05\times 0.8 + 0.875\times 0.2} = \frac{35}{43}.$$

ここまで来たよ

1. 略解: チェビシェフの定理と大数の (弱) 法則

2. モーメント母関数と中心極限定理
   - モーメント母関数の定義
   - モーメント母関数と母平均値, 母分散
   - 中心極限定理

(定義) モーメント母関数 moment generating function

離散型または連続型確率変数 X に対して,

$$M_X(\lambda) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\lambda X}]$$

を X のモーメント母関数という.

計算科学 II

$M_X(\lambda)$ は大文字だが, 確率変数ではなく, ただの λ の 1 変数関数.
積率母関数ともいう. λ のかわりによく t が使われる.

モーメント母関数の性質

$$M_X(\lambda) = \mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \boxed{}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{E}[X^k].$$

$\mathrm{E}[X^k]$: X の k 次のモーメント, 積率

例 (離散) I

L06-Q1

Quiz(モーメント母関数 (離散型確率変数))

離散型確率変数 X は次に従う.

$$P(X=x)=\begin{cases} +\frac{1}{3} & (x=+1) \\ +\frac{2}{3} & (x=-1) \\ 0 & (x=\dots,-3,-2,0,2,3,\dots) \end{cases}$$

X のモーメント母関数 $M_X(\lambda)$ を求めよう.

例 (連続)

L06-Q2

Quiz(モーメント母関数 (正規分布))

連続型確率変数 X は次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. X のモーメント母関数 $M_X(\lambda)$ を求めよう.
2. X の 0,1,2 次のモーメントを求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解: チェビシェフの定理と大数の (弱) 法則
2. モーメント母関数と中心極限定理
   - モーメント母関数の定義
   - モーメント母関数と母平均値, 母分散
   - 中心極限定理

(定理) モーメント母関数と母平均値, 母分散, モーメントの関係

$$\frac{\mathrm{d}^k M_X}{\mathrm{d}\lambda^k}(0) = \mathrm{E}[X^k]$$

$$M_X(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{E}[X^k]$$

なので,

L06-Q3

Quiz(モーメント母関数 (指数分布))

連続型確率変数 X は次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ a \cdot \mathrm{e}^{-ax} & (x \geq 0) \end{cases}$$

ただし, $a > 0$ は定数.

1. X のモーメント母関数 $M_X(\lambda)$ を求めよう. $\lambda < a$ としてよい.
2. X の k 次のモーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

問 I

L06-Q4

Quiz(モーメント母関数 (幾何分布))

離散型確率変数 X は次の確率に従う.

$$P(X=x)=\begin{cases} p(1-p)^{x-1} & (x=1,2,3,4,\ldots) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

ただし, $0<p<1$ は定数.
X のモーメント母関数 $M_X(\lambda)$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解: チェビシェフの定理と大数の (弱) 法則
2. モーメント母関数と中心極限定理
   - モーメント母関数の定義
   - モーメント母関数と母平均値, 母分散
   - 中心極限定理

(定理) 独立な確率変数のモーメント母関数

X, Y が独立のとき,

$$M_{X+Y}(\lambda) = M_X(\lambda) M_Y(\lambda)$$

なぜなら,

(一定の条件下で) モーメント母関数が同じなら, 確率変数として同じ.

認めてくれ〜

中心極限定理

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする.

$T_n = \frac{\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)-\mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$ とすると,

T_n は, $n \to +\infty$ の極限で, $N(0, 1^2)$ に従う. すなわち

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq T_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x$$

T_n は $N(0, 1^2)$ にしたがう Z に法則収束する.

証明.

中心極限定理の応用

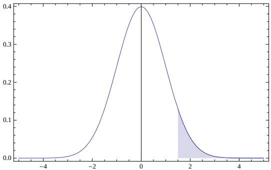
L06-Q5

Quiz(中心極限定理)

確率変数 $R_1, \ldots, R_9$ は, 独立同分布にしたがう. R_t の母平均値は $\mathrm{E}[R_t] = 2$, 母分散は $\mathrm{V}[R_t] = \frac{4}{9}$ である.
確率変数 $Y_9 = R_1 + \cdots + R_9$ が $Y_9 > 16$ となる確率を, $n = 9$ が無限大に近いと思って中心極限定理を利用して, 近似的に求めよう.

標準正規確率表 (上側確率=$Q(x) = 1 - \Phi(x)$)

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



Math ラウンジ=チューター

月火水木昼, 1-614
2015-05-18,19,20 は数学検定ウィークです.
受検案内とゆうちょ銀行払込用紙を配布します.
また, 過去問や問題集を展示し．受検の相談にのります.
各科目のレポート, 課題などその他の質問・相談もふだん通り歓迎です.
数学検定を取ろう!
`http://www.su-gaku.net/`

1. 2015-06-03 申込締切, 2015-07-11 検定実施

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`

確率統計☆演習 II プチテスト

日時 2015-05-29 金 5
条件 外部記憶ペーパー使用可 (作成 10 分), 答案作成 (80 分)
持込 なし, 電卓も不可. Excel の操作の問題はありません. 数表が必要な問題を出題するときは数表をつけます.

出題計画 2015-05-22 に精密化, 確定します.

1. 同時分布, 周辺分布, 条件付き確率のどれかからどれかを計算する (L01,L03)
2. 日本語による状況の説明からベイズ推定を行う (L05)
3. 確率変数の独立性を利用して式を簡単化する (L02)
4. 確率変数の独立性を判定する, 独立であるという条件を使って確率を定める (L02)
5. 分割表からピアソンの χ^2 を求め検定する (L04)
6. 確率関数, 確率密度関数からモーメント母関数を求める (L06)
7. モーメント母関数からモーメント求める (L06)
8. 中心極限定理を利用して Y_n に関係する確率や量を求める (L06)
9. More