正規分布・確率変数の和・中心極限定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L07(2015-05-22 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-05-22 Fri 20:24 JST hig"

今日の目標

- 独立な確率変数の和の確率や期待値を求められる
- 中心極限定理の主張を説明できる
- 中心極限定理を使って, 独立同分布に従う多数の確率変数の和の確率や期待値を近似的に求められる

http://hig3.net

L06-Q1

Quiz 解答:モーメント母関数 (正規分布)

1. $M_X(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{\lambda x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2}$.
2. $M_X(0) = 1$ (どんな X でもそう), $\frac{\mathrm{d}M_X}{\mathrm{d}\lambda}(0) = 0$, $\frac{\mathrm{d}^2 M_X}{\mathrm{d}\lambda^2}(0) = 1$.
3. $\mathrm{V}[X] = \frac{\mathrm{d}^2 M_X}{\mathrm{d}\lambda^2}(0) - \left(\frac{\mathrm{d}M_X}{\mathrm{d}\lambda}(0)\right)^2 = 1$. $\mathrm{N}(0, 1^2)$ だからあってる.

L06-Q2

Quiz 解答:モーメント母関数 (指数分布)

1. $M_X(\lambda) = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{a}}$.
2. 等比級数の和の公式と思って, $\mathrm{E}[X^k] = k! a^{-k}$.
3. $M_X(0)'' - M_x'(0)^2 = (2 - 1 \cdot 1)a^{-2} = a^{-2}$.

ここまで来たよ

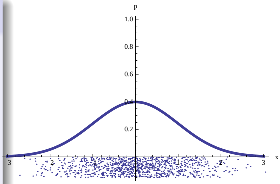
1. 略解: モーメント母関数
2. 正規分布・確率変数の和・中心極限定理
   - 正規分布
   - 確率変数の和
   - 中心極限定理

標準正規分布 (ガウス分布) $\mathrm{N}(0, 1^2)$

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$

確率密度関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

累積分布関数 $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x'^2}{2}} \, \mathrm{d}x'$



$\mathrm{N}(0, 1^2)$ の性質

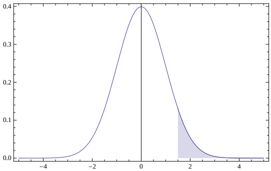
連続型確率変数 Z が標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従うとき

- モーメント母関数 $M_Z(\lambda) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2}$.
- モーメント $\mathrm{E}[1] = 1$, $\mathrm{E}[Z] = 0$, $\mathrm{E}[Z^2] = 1$.
- 母分散 $\mathrm{V}[Z] = 1 - 0^2 = 1$.

前回

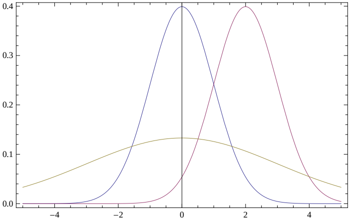
標準正規確率表 (上側確率=$Q(x) = 1 - F(x)$)

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



一般の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

確率変数 $X = aZ + b$ を考える ($a > 0, b$ は定数).
確率密度関数は, 横に a 倍に拡大, b 平行移動, 縦に $\frac{1}{a}$ 倍.



$$f(x; b, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

- 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[aZ + b] = \boxed{} = b.$
- 母分散 $\sigma^2 = \mathrm{V}[X] = \mathrm{V}[aZ + b] = \boxed{} = a^2.$

(一般の) 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

確率密度関数

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

母平均値 μ, 母分散 σ^2.

Example

正規分布のモーメント母関数 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X のモーメント母関数 $M_X(\lambda)$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解: モーメント母関数
2. 正規分布・確率変数の和・中心極限定理
   - 正規分布
   - 確率変数の和
   - 中心極限定理

確率変数の和

独立な確率変数 X, Y を考える.
$T = X + Y$ の確率 $P(T = t)$ や期待値 $\mathrm{E}[\phi(T)]$ はどうやって求める?

復習 独立な X, Y の性質

- 離散 $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$,
  連続 $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.
- $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{V}[X + Y] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]$.

確率変数の和の確率

- 離散のとき $P(T = t) = \sum_s P(X = s)P(Y = t - s)$
- 連続のとき $f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s) f_Y(t - s)\,\mathrm{d}s$.
- モーメント母関数

$$M_T(\lambda) = M_{X+Y}(\lambda) = \boxed{} = M_X(\lambda) \times M_Y(\lambda).$$

L07-Q1

Quiz(確率変数の和)

独立な確率変数 X, Y は下の確率に従う.

$$P(X=x)=\begin{cases} 3/6 & (x=1) \\ 1/6 & (x=2) \\ 2/6 & (x=3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}, \quad P(Y=y)=\begin{cases} 6/10 & (y=5) \\ 3/10 & (y=6) \\ 1/10 & (y=7) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率変数 $T=X+Y$ の従う確率を求めよう.

L07-Q2

Quiz(確率変数の和)

X, Y は独立な確率変数であり X は母平均値 $\mu_1 = 0$, 母分散 $\sigma_1^2 = 1^2$ の正規分布に従う. Y は母平均値 $\mu_2 = 3$, 母分散 $\sigma_2^2 = 2^2$ の正規分布に従う.
$T = X + Y$ の確率密度関数 $f(t)$ を求めよう.

モーメント母関数が同じなら, (一定の条件下で) 確率変数として同じ.
「確率変数の性質は, モーメント母関数だけで決まる」

認めてくれ〜

ここまで来たよ

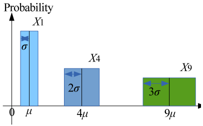
1. 略解: モーメント母関数
2. 正規分布・確率変数の和・中心極限定理
   - 正規分布
   - 確率変数の和
   - 中心極限定理

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$X_1, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする. 正規分布じゃない. どんな分布でも可 n が大きいとき,

- $T_n = X_1 + \cdots + X_n$, の確率分布は,
  の $\boxed{}$ に似る
- $U_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ の確率分布は,
  $\boxed{}$ に似る

$n \to +\infty$ では分布の個性がなくなる!
T_n の確率密度関数はこんな感じ? 実は正規分布. U_n は?



L07-Q3

Quiz(中心極限定理)

$X_t = R_1 + \cdots + R_t$. $R_1, R_2, \ldots$ は連続型確率変数で, 独立同分布に従う. X_t の確率密度関数 $p_t(x)$ のグラフは, t が増加するとともにどうなる?

1. 幅は広く, 高さは高くなっていく.
2. 幅は広くなっていく. 高さは変わらない.
3. 幅は広く, 高さは低くなっていく.
4. 幅は狭く, 高さは高くなっていく.
5. 幅は狭くなっていく. 高さは変わらない.
6. 幅は狭く, 高さは低くなっていく.

中心極限定理 (厳密バージョン)

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が, 母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとする. 正規分布じゃない. どんな分布でも可

$V_n = \frac{\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) - \mu}{\sigma} \times \sqrt{n}$ とすると,

V_n は, $n \to +\infty$ の極限で, $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う. すなわち

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leq V_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \, \mathrm{d}x$$

T_n は $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう Z に法則収束する.

証明.

$\mathrm{E}[V_n] = 0, \mathrm{V}[V_n] = 1$ はすぐわかるが…

Quiz(中心極限定理)

確率変数 $X_1, \ldots, X_{10}$ は確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leq x < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

の独立同分布に従う．ここで，f から $\mathrm{E}[X_i] = 1, \mathrm{V}[X_i] = \frac{1}{3}$ と求められる．$n = 10$ が大きいと思うと，次はそれぞれ，近似的にどのような分布に従うか，'母平均値が$\boxed{}$，母分散が$\boxed{}$の$\boxed{}$分布' のように答えよう．

1. 確率変数 $T = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}$
2. 確率変数 $U = \frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{10})$

Math ラウンジ=チューター

月火水木昼, 1-614

各科目のレポート, 課題などその他の質問・相談もふだん通り歓迎です.

確率統計☆演習 II プチテスト

2015-05-29 金 5. 別紙参照.

数学検定を取ろう!

http://www.su-gaku.net/

1. 2015-06-03 申込締切, 2015-07-11 検定実施

manaba 出席カード提出

https://attend.ryukoku.ac.jp