2 項分布・幾何分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L08(2015-06-05 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-06-05 Fri 19:02 JST hig"

今日の目標

- (本質的に)2 項分布にしたがう確率変数について, 確率, 母期待値が計算できる
- 2 項検定できる
- (本質的に) 幾何分布にしたがう確率変数について, 確率, 母期待値が計算できる

hig3.net

L07-Q1

Quiz 解答:確率変数の和

$$P(T=t)=\begin{cases}\frac{3}{6}\cdot\frac{6}{10} & (t=6)\\ \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{10} & (t=7)\\ \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{10} & (t=8)\\ \text{略} & (t=9)\\ \text{略} & (t=10)\\ 0 & (\text{他})\end{cases} \tag{3.1}$$

$M_T(\lambda)=M_X(\lambda)M_Y(\lambda)$ を使って $\mathrm{e}^{\lambda t}$ の係数 $P(T=t)$ を求める作戦もある.

L07-Q2

Quiz 解答:確率変数の和

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}s \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(s-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-s-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} = \cdots$$

$$M_T(\lambda) = \mathrm{e}^{\mu_1\lambda} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2\sigma_1^2}{2}} \mathrm{e}^{\mu_2\lambda} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2\sigma_2^2}{2}} = \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)\lambda} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}$$

よって, 母平均値 $\mu_1 + \mu_2$, 母分散 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ の正規分布. 再生的.

L07-Q4

Quiz 解答:中心極限定理　　T は母平均値が 10, 分散が $\frac{10}{3}$ の正規分布 $\mathrm{N}(10, \frac{10}{3})$ に従う.

U は母平均値が 1, 分散が $\frac{1}{30}$ の正規分布 $\mathrm{N}(1, \frac{1}{30})$ に従う.

ここまで来たよ

1. 略解: 正規分布・確率変数の和・中心極限定理
2. 2 項分布・幾何分布
   - ベルヌーイ分布
   - 2 項分布
   - 幾何分布

ベルヌーイ分布

ベルヌーイ分布

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X はベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1,p)$ に従うという.

$$P(X=k)=\begin{cases} p & (k=1) \\ 1-p & (k=0) \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

意味:ベルヌーイ試行=(不公平な) コイン投げ. 表がでる確率 p.

ベルヌーイ分布のモーメント母関数と期待値

$$M_X(\lambda) = (p\mathrm{e}^{\lambda}+1-p)$$

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{}, \qquad \mathrm{V}[X] = \boxed{}$$

L08-Q1

Quiz(ベルヌーイ分布)

ある宝くじは, あたりとはずれの 2 種類の結果だけがある. あたりの確率は 0.05 である. あたりの賞金は 1000 円, はずれの賞金は 0 円である. 賞金を確率変数 Y とする.

1. Y と, ベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1, p)$ に従う確率変数 X との関係を書こう.
2. Y の母平均値と母分散を求めよう.

2. では過程が必要だが, ベルヌーイ分布の母平均値や母分散やモーメント母関数をおぼえていれば記してそれを使ってもよい. ベルヌーイ分布と無関係に解いてもよい. モーメント母関数を自分で求めて使ってもよい.

ここまで来たよ

1. 略解: 正規分布・確率変数の和・中心極限定理
2. 2 項分布・幾何分布
   - ベルヌーイ分布
   - 2 項分布
   - 幾何分布

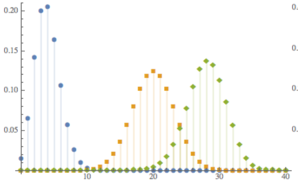
2 項分布

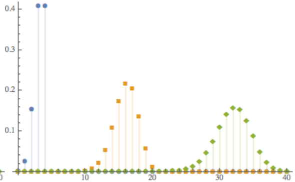
2 項分布

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X は 2 項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ に従うという.

$$P(X = k) = \begin{cases} {}_n\mathrm{C}_k\, p^k (1-p)^{n-k} & (k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n) \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

意味: ベルヌーイ試行を n 回繰りかえしたとき, n 回中 k 回コインの表を得る確率.





$\mathrm{B}(40, 0.1), \mathrm{B}(40, 0.5), \mathrm{B}(40, 0.7)$, $\mathrm{B}(4, 0.8), \mathrm{B}(20, 0.8), \mathrm{B}(40, 0.8)$

2 項分布のモーメント母関数と期待値

$$M_X(\lambda) = (pe^{\lambda} + 1 - p)^n$$

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{}, \mathrm{V}[X] = \boxed{}$$

2 項分布の再生性

$X_1 \sim \mathrm{B}(n_1, p)$, $X_2 \sim \mathrm{B}(n_2, p)$ ならば $Y = X_1 + X_2 \sim \mathrm{B}(n_1 + n_2, p)$.

このように, 和がふたたびもとと同じ分布にしたがうとき, 分布 $\mathrm{B}(n, p)$ は再生性を持つという.
一様分布 (例:サイコロの目) は再生的でない.

2 項分布と正規分布

$X_i \sim \mathrm{B}(1, p)$ のとき, $T_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{B}(n, p)$
よって, 中心極限定理から, $\mathrm{B}(n, p)$ は $n \to \infty$ で正規分布に「似る」

L08-Q2

Quiz(2 項分布)

確率 $p = \frac{2}{3}$ で表のでるいかさまコインがある. 100 回投げる.

1. 表が 50 回でる確率はを求めよう.
2. 表がでる回数の母平均値を求めよう.
3. 表がでる回数の母分散を求めよう.

L08-Q3

Quiz(2 項分布)

ある宝くじは, あたりと残念賞の 2 種類の結果だけがある. あたりの確率は 0.05 である. あたりの賞金は 1010 円, 残念賞の賞金は 10 円である. このくじを 10 回ひいたときの賞金の合計額を確率変数 Y とする.

1. Y と, 2 項分布 $\mathrm{B}(n, p)$ に従う確率変数 X との関係を書こう.
2. 確率 $P(Y = 2100)$ を求めよう (小数の積に書けば, それ以上整理しなくてよい).
3. Y の母平均値と母分散を求めよう.

2,3 では過程が必要だが, 2 項分布の確率や母平均値や母分散やモーメント母関数をおぼえていれば記してそれを使ってもよい. 2 項分布と無関係に解いてもよい. モーメント母関数を自分で求めて使ってもよい.

Quiz(2 項検定)

コインを 6 回投げたところ, 6 回中で裏が 5 回だった. このコインは公平でない, を対立仮説として, 有意水準を 5%で検定を行って判定しよう.

ここまで来たよ

1. 略解: 正規分布・確率変数の和・中心極限定理
2. 2 項分布・幾何分布
   - ベルヌーイ分布
   - 2 項分布
   - 幾何分布

Quiz(初めて表, の確率)

ある 1 日に死者 10 名以上の交通事故が起きる確率を $1/10000 = 0.0001$ とする.

今日そのような事故が起きた. 次にそのような交通事故が起きるまでの間隔として確率が一番大きい間隔は?

1. 1 日 (=次の日)
2. 100 日
3. 5000 日
4. 10000 日
5. 20000 日

幾何分布

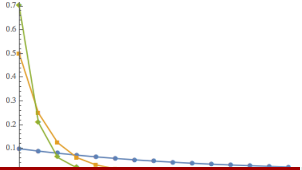
幾何分布

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X はパラメタ p の幾何分布に従うという.

$$P(X=k)=\begin{cases} p(1-p)^{k-1} & (k=1,2,3,\dots) \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

意味: ベルヌーイ試行を繰りかえしたとき, k 回目に初めてコインの表を得る確率.

これは統計学の流儀. 確率論では, $p(1-p)^k$ $(k=0,1,2,\dots)$ とひとつずらして定義することが多い. 要確認.



幾何分布のモーメント母関数と期待値

$$M_X(\lambda) = \frac{p}{\mathrm{e}^{-\lambda} - (1-p)},$$

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{}, \qquad \mathrm{V}[X] = \boxed{}$$

L08-Q4

Quiz(幾何分布)

ある宝くじは, あたりとはずれの 2 種類の結果だけがある. この宝くじをくりかえし引いたときに, 初めてあたるのが $X = k$ 回目とする. つまり, $k-1$ 回連続はずれ, k 回目で初めてあたるとする ($k = 1, 2, 3, \dots$).

1. X はどのような分布に従うかこたえよう.
2. 確率 $P(X = k)$ を k で表そう.
3. X の母平均値と母分散を求めよう.

2,3 では過程が必要だが, 幾何分布の確率や母平均値や母分散やモーメント母関数をおぼえていれば記してそれを使ってもよい. 幾何分布と無関係に解いてもよい. モーメント母関数を自分で求めて使ってもよい.

Math ラウンジ=チューター

月火水木昼, 1-614
各科目のレポート, 課題などその他の質問・相談もふだん通り歓迎です.

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`