統計的仮説検定・指数分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II L10(2015-06-19 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-06-22 Mon 22:12 JST hig"

今日の目標

- 検定における第 1 種, 第 2 種の過誤, 有意水準, 信頼係数, 検定力, 片側検定, 両側検定が説明できる
- 指数分布にしたがう確率変数について, 確率, 母期待値が計算できる

hig3.net

L09-Q1

Quiz 解答:ポアソン分布

県で 1 日に起きる交通死亡事故の件数 X は, 母数 $\alpha = 3$ のポアソン分布にしたがう.

1. $P(X = 0) = \frac{3^0}{0!}\mathrm{e}^{-3} = \mathrm{e}^{-3}$.
2. $P(X = 6) = \frac{3^6}{6!}\mathrm{e}^{-6} = \frac{81}{80}\mathrm{e}^{-6}$.
3. $\mathrm{V}[X] = 3$.

L09-Q2

Quiz 解答:ポアソン分布

モーメント母関数は $M_{X_1+X_2}(\lambda) = M_{X_1}(\lambda)M_{X_2}(\lambda) = \exp((\mathrm{e}^\lambda - 1)\alpha_1)\exp((\mathrm{e}^\lambda - 1)\alpha_2) = \exp((\mathrm{e}^\lambda - 1)(\alpha_1 + \alpha_2)$ なので,
$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Po}(\alpha_1 + \alpha_2)$

L09-Q3

Quiz 解答:2 項分布

点数 X は 2 項分布 $\mathrm{B}(5, 0.9)$ に従う
4 点の確率 $P(X=4) = {}_5\mathrm{C}_4 0.9^4 \cdot 0.1^2$
5 点の確率 $P(X=5) = {}_5\mathrm{C}_5 0.9^5 \cdot 0.1^0$
6 点の確率 $P(X=6) = 0.$

L09-Q4
Quiz 解答:ポアソン分布
点数 X はパラメタ $\alpha = 4.5$ のポアソン分布にしたがう.
4 点の確率 $P(X=4) = \frac{4.5^4}{4!}\mathrm{e}^{-4.5}.$
5 点の確率 $P(X=4) = \frac{4.5^5}{5!}\mathrm{e}^{-4.5}.$
6 点の確率 $P(X=4) = \frac{4.5^6}{6!}\mathrm{e}^{-4.5}.$

L09-Q5
Quiz 解答:ポアソン分布
ハーフの得点 X はパラメタ $\alpha = 1.5$ のポアソン分布にしたがう.

1. $\frac{1.5^0}{0!}\mathrm{e}^{-1.5} = \mathrm{e}^{-1.5}$
2. $\frac{1.5^0}{0!}\mathrm{e}^{-1.5}\frac{1.5^3}{3!}\mathrm{e}^{-1.5} = \frac{1.5^3}{6}\mathrm{e}^{-3}.$

3. ゲームの得点 Y はパラメタ $\alpha = 3$ のポアソン分布にしたがう．条件付き確率を考えて，$\frac{P(X=0)P(X=3)}{P(Y=3)} = \frac{\frac{1.5^0}{0!}\mathrm{e}^{-1.5}\frac{1.5^3}{3!}\mathrm{e}^{-1.5}}{\frac{3^3}{3!}\mathrm{e}^{-3}} = \frac{1}{8}$.
または，
$$\frac{P(X=0)P(X=3)}{P(X=0)P(X=3)+P(X=1)P(X=2)+P(X=2)P(X=1)+P(X=3)P(X=0)} = \frac{1}{8}.$$
再生性があるからどちらでも同じ答になる．

ここまで来たよ

1. 略解: ポアソン分布
2. 統計的仮説検定・指数分布
   - 復習:母分散の検定
   - 統計的仮説検定の有意水準と検定力
   - 指数分布

母分散の χ^2 検定 (母平均値未知)

未知の正規分布からの標本に基づき, 母分散が σ_0^2 かどうか判定したい!(σ_0^2 でないと言いたい)
実際は, 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma_1^2)$ にしたがう確率変数 X から抽出した, サイズ n の標本だとする. μ, σ_1 未知.

- 対立仮説 H_1 母分散 $\sigma_1 \neq \sigma_0$.
- 帰無仮説 H_0 母分散 $\sigma_1 = \sigma_0$.

不偏標本分散を S^2 としたとき, 帰無仮説のもとで,

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

.
この不等式の定める領域の外側が, 有意水準 α での (帰無仮説の) 棄却域.

L10-Q1

Quiz(母分散の検定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは, 母分散 $\sigma_0^2 = 4\mathrm{g}^2$ の分布であることが定められているという.
トレーニング中のアルバイトの人に, ポテトフライ S サイズを 9 個作ってもらったところ, 重さは下のようだった (単位は g).

$$76, 76, 76, 76, 80, 84, 84, 84, 84.$$

このアルバイトの作るポテトフライ S の重さの母分散 σ_1^2 は, σ_0^2 と異なるか? アルバイトのほうの重さが正規分布にしたがうと仮定し, 有意水準 5% で, 母分散の χ^2 検定で判定しよう.

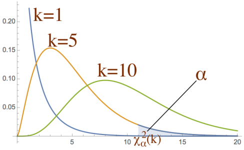
Quiz 略解+コメント:母分散の検定
略解

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で,
2. 母分散の χ^2 検定を行う.
3. 帰無仮説を,「アルバイトの…重さの正規分布の母分散 σ_1^2 は, $\sigma_0^2 = 4$ に等しい」とする
4. サイズ n の標本の不偏標本分散を S^2 とすると, 量 $\chi^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2}$ は, 自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う. この量を検定統計量として用いる.
5. この標本に対して $\chi^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2} = (9-1)\cdot\frac{16}{4} = 32.$
6. χ^2 分布表より, この値は, 棄却域 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 2.180$ or $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 17.53$ に含まれるので帰無仮説を棄却する. 母分散が異なると (有意水準 0.05 で) 結論する.

χ^2 分布表

$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(k))$.

$k \backslash \alpha$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00003927	0.0001571	0.0009821	0.003932	0.01579	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.07172	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2



ここまで来たよ

1. 略解: ポアソン分布

2. 統計的仮説検定・指数分布
   - 復習:母分散の検定
   - 統計的仮説検定の有意水準と検定力
   - 指数分布

自由に仮説検定を設計して，仮説検定の性能を評価しよう

これまで，他の人が考案した有名な (有意水準固定の) 統計的検定を使ってきた．
例：t 検定，χ^2 検定，独立性の検定．
これはごく一部の検定で，統計は自分でいくらでも作ることができる．2 項分布を例に，広い立場から検定を考えてみよう．

統計的検定

あるくじ付きお菓子は，工場で，$p_0 = 0.03$ の確率で当たりを混ぜることになっている．
工場の当たりくじ混ぜ込みマシンが異常でないか調べたい．

- 対立仮説 H_1 実際の当たり確率 $p_1 \neq p_0$
- 帰無仮説 H_0 実際の当たり確率 $p_1 = p_0$
- 提案する検定 100 個調べて，当たりが $0, 5, 6, \ldots, 100$ 個であるときには帰無仮説を棄却する．

L10-Q2

2 項検定

実際の当たり確率が $p_0 = 0.03$ であるときに, 提案した検定で, 帰無仮説を間違えて棄却してしまう確率 α を求めよう.

このような誤りを $\boxed{}$, 確率 α を 検定

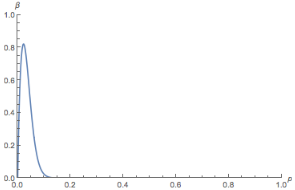
の $\boxed{}$ という.

α は小さい方がいい.

L10-Q3

2 項検定

実際の当たり確率が $p_1(\neq p_0)$ であるときに, 提案した検定で, 帰無仮説を間違えて採択してしまう確率 β を求めよう.



このような誤りを $\boxed{}$, 確率 $1-\beta$ を 検定の $\boxed{}$ という.

β は小さい方がいい.

過誤，有意水準，検出力

		真実	
		H_0 は真	H_0 は偽
判断	H_0 を棄却しない	正しい判断	第 2 種の過誤 (確率 β で起きる)
	H_0 を棄却	第 1 種の過誤 (確率 α で起きる)	正しい判断

$1-\alpha$: 区間推定でいう $\boxed{}$ に対応

$1-\beta$: 検出力

p 値 (p-value)

検定統計量がこの標本よりも $\boxed{}$. $p<\alpha$ なら H_0 を棄却.

ふつうは，β を小さくしようとすると α が大きくなってしまう.
ふつうは，α を指定の値に固定して，β をなるべく小さくするという作戦.

ふつうは, α を指定の値に固定して, β をなるべく小さくするという作戦.
をとる (→ 両側検定 両側に $\alpha/2$ ずつ配分)
L10-Q4

2 項検定

両側検定で考える. 帰無仮説 $p_1 = p_0 = 0.03$ に対して, 当たりが 6 個の標本に対する p-値 (6 個が当たり以上に極端な結果がでる確率) を求めよう.

p-値が小さいほど, 帰無仮説を棄却すべき.

片側検定

片側検定

あるくじ付きお菓子は, 工場で, 2% すなわち $p_0 = 0.03$ の確率で当たりを混ぜることになっている. 工場の当たり混ぜマシンの確率が低い方にずれていないか調べたい.

- 対立仮説 H_1 実際の当たり確率 $p_1 < p_0$
- 帰無仮説 H_0 実際の当たり確率 $p_1 \geq p_0$
- 提案する検定 100 個調べて, 当たりが 0 個または 1 個であるときには帰無仮説を棄却する.

片側検定 この検定, 独立性の検定

$\updownarrow$

両側検定 t 検定, 分散の χ^2 検定

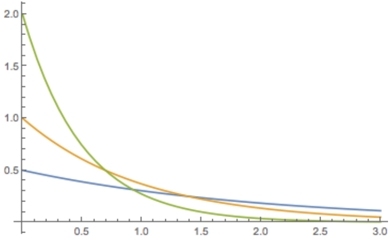
ここまで来たよ

指数分布

連続型確率変数 X でつぎの確率密度関数をもつものをパラメタ $\alpha > 0$ の指数分布にしたがうという.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

意味: 独立で, 頻度が時間の長さに比例して (単位時間に平均 α 回) 起きるできごと (その回数はポアソン分布にしたがう) の, おきる時間間隔 x の分布.



$\alpha = 0.5, 1, 2.$

指数分布のモーメント母関数と期待値

$$M_X(\lambda) = \frac{\alpha}{\alpha - \lambda} \qquad (\lambda < \alpha)$$

$$\mathrm{E}[X] = \boxed{}, \mathrm{V}[X] = \boxed{}$$

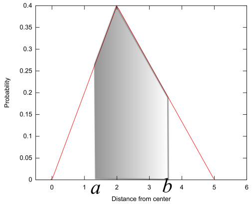
連続型確率変数と確率密度関数の復習

確率密度関数 $f(x)$ の意味

$$\text{期待値 } \mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$P(a \leq X < b) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[a \leq X < b]}(X)] = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$\text{全事象の確率 } 1 = \mathrm{E}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot f(x)\, \mathrm{d}x.$$



$$\mathbf{1}_{[X \text{ の条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (X = x \text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

確率統計☆演習 I(2014)L08

分布の間の関係

時間	回数	間隔
離散	2 項分布 (離散)	幾何分布 (離散)
	$\downarrow np = \alpha, n \to \infty$	
連続	ポアソン分布 (離散)	指数分布 (連続)

本来なら, 指数分布で考えるべきことを, 離散化して, 幾何分布で考えてみる.

時間 1 を n 個に等分する. 等分された時間帯に起きる確率 $p = \frac{\alpha}{n}$.

時刻 x つまり $k = nx$ 番目の区間に初めて発生する確率は,

$\frac{\alpha}{n}(1 - \frac{\alpha}{n})^{nx}$.

確率密度は, 区間の長さ $1/n$ で割って,

$\frac{1}{1/n}\frac{\alpha}{n}(1 - \frac{\alpha}{n})^{nx} \overset{n\to+\infty}{\to} \alpha e^{-\alpha x}$.

L10-Q5

Quiz(指数分布)

あるシステムの故障は, 互いに独立に, 時間に比例する頻度で発生する. 1時間に平均 0.3 回の故障が発生する.

1. 故障と故障の時間間隔の母平均値と母標準偏差を求めよう.
2. 故障と故障の時間間隔が 120 分以上である確率を求めよう.

L10-Q6

Quiz(指数分布)

あるサッカーチームは, 1 ゲーム 90 分で平均 4.5 点得点できる.

1. 得点と得点の時間間隔の母平均値を求めよう.
2. 得点と得点の時間間隔が 5 分未満である確率を求めよう.
3. 得点と得点の時間間隔が 15 分以上 25 分未満になる確率を求めよう.

Math ラウンジ=チューター
月火水木昼, 1-614
各科目のレポート, 課題などその他の質問・相談もふだん通り歓迎です.
スケジュール
2015-06-24 水 4 特別講義
2015-06-24 水 5 数理情報演習履修説明会

manaba 出席カード提出
https://attend.ryukoku.ac.jp