母平均値の区間推定・母平均値の差の区間推定・検定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

確率統計☆演習 II　L13(2015-07-10 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-07-10 Fri 19:45 JST hig"

今日の目標

- 標本から正規分布の母平均値を区間推定できる
- 2 つの母分布の母平均値の差を区間推定できる
- カイ 2 乗検定,t 検定,2 標本 t 検定について両側・片側検定ができる

hig3.net

L12-Q1

Quiz 解答:カイ 2 乗分布

$Z_i = \frac{X_1}{2}$ は標準正規分布にしたがう.

1. $$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\tfrac{X_1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{X_5}{2})^2] =& 5 \\ \mathrm{E}[\tfrac{1}{5}[(X_1)^2 + \cdots + (X_5)^2]] =& 5 \times \tfrac{1}{5} \cdot 2^2 \\ \mathrm{V}[(\tfrac{X_1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{X_5}{2})^2] =& 10 \\ \mathrm{V}[\tfrac{1}{5}[(X_1)^2 + \cdots + (X_5)^2]] =& 10 \times \tfrac{1}{5^2} \cdot (2^2)^2 \end{aligned}$$

2. $n = 5$ の行を見て, $a = \frac{1}{5} \cdot 2^2 \times 11.07$,
3. $n = 5$ の行を見て, $b = \frac{1}{5} \cdot 2^2 \times 0.5543$.

L12-Q2

母分散 σ^2 の信頼係数 95%の信頼区間は,

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)} &< \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\\ \frac{8\cdot 4}{17.53} &< \sigma^2 < \frac{8\cdot 4}{2.180}\\ 1.825 &< \sigma^2 < 14.68\end{aligned}$$

L12-Q4

Quiz 解答:t 分布

t 分布は原点に関して対称であることに注意する.

1. $P(-t_{0.025}(5) < T < +t_{0.025}(5)) = 1 - 0.05$ なので, 表より, $a = t_{0.025}(5) = 2.571$.
2. $P(T > -4.029) = 1 - P(T < -4.029) = 1 - P(T > 4.029)$ なので, $n = 7$ の行を探して, $1 - 0.0025 = 0.9975$.

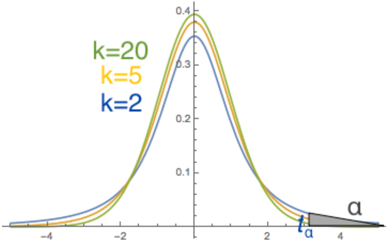
ここまで来たよ

1. 略解: 母分散の区間推定・t 分布
2. 母平均値の区間推定・母平均値の差の区間推定・検定
   - t 分布
   - 母平均値の区間推定
   - 正規分布にしたがう確率変数の差
   - 2 標本 t 検定・ 両側検定と片側検定

t 分布

t 分布

確率変数 Z が標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$, 確率変数 Y が自由度 n のカイ 2 乗分布 $\mathrm{Ga}(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ にしたがい, Z と Y が独立であるとき, 連続型確率変数 $T=\dfrac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ のしたがう分布を自由度 n の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布という.



$n\to+\infty$ では Y と Z はほぼ同じ. n が小さいとずれが大きい.
$\rightsquigarrow$ なんでそんなへんな分布?

標本平均値の分布 (母分散既知)

母分散で標準化すると標準正規分布

X_i $(i = 1, \ldots, n)$ を母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布にしたがう確率変数とする (すなわち, ある分布からとるサイズ n の標本とする).
標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n]$ から作った量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

は, $n \to +\infty$ で, 中心極限定理より, 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう.

σ^2 が事前にわかっていれば, これを使って, μ の区間推定や μ の検定ができる.
しかし実際には, σ^2 がわかっていることはあまりない. 標本分散で代用したい,

標本平均値の分布 (母分散未知)

母分散未知のとき標本分散で代用すると t 分布

$X_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ を母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布にしたがう確率変数とする (すなわち, ある分布からとるサイズ n の標本とする).

$$\text{標本平均値}\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n],$$
$$\text{標本分散 } S^2 = \frac{1}{n-1}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2]$$

から作った量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \left(= \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\frac{1}{n-1}}} \right)$$

は, 自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.

なぜなら, 最右辺で分子 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$, 分母の $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布にしたがうから.

ここまで来たよ

1. 略解: 母分散の区間推定・t 分布

2. 母平均値の区間推定・母平均値の差の区間推定・検定
   - t 分布
   - 母平均値の区間推定
   - 正規分布にしたがう確率変数の差
   - 2 標本 t 検定・ 両側検定と片側検定

母平均値の区間推定

$$P\left(t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

なので, μ についての条件に書き替えて,

区間推定

サイズ n の標本で, 標本平均値 $\overline{X}$ 不偏標本分散 S^2 が得られたとき, 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$ の, 信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \times \sqrt{S^2/n} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \times \sqrt{S^2/n}$$

L13-Q1

Quiz(母分散の区間推定)

あるファーストフードチェーンのポテトフライ S の重さは正規分布に従うという.
お店で 9 個のポテトフライ S サイズを買って重さを量ったところ, 下のようだった (単位は g).

$$78, 78, 78, 78, 80, 82, 82, 82, 82$$

母平均値と母分散を信頼係数 $1-\alpha=0.95$ で区間推定しよう.

ここまで来たよ

1. 略解: 母分散の区間推定・t 分布
2. 母平均値の区間推定・母平均値の差の区間推定・検定
   - t 分布
   - 母平均値の区間推定
   - 正規分布にしたがう確率変数の差
   - 2 標本 t 検定・ 両側検定と片側検定

正規分布にしたがう確率変数の和と差

正規分布の再生性

確率変数 $X \sim \mathrm{N}(a, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(b, \sigma_2^2)$ のとき,
和の確率変数 $W = X + Y \sim \mathrm{N}(a + b, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ であることが,

モーメント母関数を使って証明できる. 再生性

確率統計 II(2015)L07 Quiz1

ところで, $(-1) \times Y \sim \mathrm{N}(-b, \sigma_2^2)$ より
差の差の確率変数 $X - Y \sim \mathrm{N}(a - b, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. 以下 $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ とします.

標本平均値の差

確率変数 X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$: 母平均値 a, 母分散 σ^2 の独立同分布
確率変数 Y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$: 母平均値 b, 母分散 σ^2 の独立同分布
とする (サイズ n, m の標本). 中心極限定理より, 標本平均値は
$\overline{X} = \frac{1}{n}[X_1 + \cdots + X_n] \sim \mathrm{N}(a, \frac{\sigma^2}{n})$.
$\overline{Y} = \frac{1}{m}[Y_1 + \cdots + Y_m] \sim \mathrm{N}(b, \frac{\sigma^2}{m})$.
よって, $\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathrm{N}(a - b, \sigma^2 \cdot (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}))$.
これを使って $a - b$ について区間推定や検定ができる.

しか〜し, σ^2 が最初からわかっていることはなかなかない.
$(X, Y$ をあわせた=プールした$)$ 標本分散 S^2 で代用したい.

標本平均値の差

2 標本 t 統計量

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (a - b)}{\sqrt{S^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}}$$

は自由度 $n + m - 2$ の t 分布にしたがう

母平均値の差の区間推定

信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\overline{X} - \overline{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})} < a - b < \overline{X} - \overline{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\sqrt{S^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}$$

ただし, S^2 は, 合併した (プールした) 標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n+m-2}[(X_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2 + (Y_1 - \overline{Y})^2 + \cdots + (Y_m - \overline{Y})^2]$$

- 2 つの正規分布の母平均値を比べるには, 差が正規分布または t 分布に従うことを使う
- 2 つの正規分布の母分散を比べるには, 比が F 分布に従うことを使う (やらないけど).

L13-Q2

Quiz(母平均値の差の区間推定 (母分散未知))

ドーナツ製造マシン 1 号,2 号が製造するドーナツの重さ X_i, Y_jg は, 未知の母平均値 a, b の独立同分布にしたがう確率変数である. 母分散も未知だが, 1 号と 2 号で等しいことがわかっている.

1 号,2 号で製造したドーナツの重さは次のようだった.

1 号: $51\text{g}, 52\text{g}, 47\text{g}, 50\text{g}.$

2 号: $55\text{g}, 56\text{g}, 51\text{g}, 52\text{g}, 56\text{g}, 54\text{g}.$

1. $\overline{X}, \overline{Y}$, 合併した標本分散 S^2 を求めよう.
2. 母平均値の差 $a - b$ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

ここまで来たよ

1. 略解: 母分散の区間推定・t 分布
2. 母平均値の区間推定・母平均値の差の区間推定・検定
   - t 分布
   - 母平均値の区間推定
   - 正規分布にしたがう確率変数の差
   - 2 標本 t 検定・ 両側検定と片側検定

(両側)2 標本 t 検定 I

母平均値に差があるかないかを, 2 標本 t 統計量を利用して検定するもの. L13-Q3

Quiz(両側 2 標本 t 検定)

ドーナツ製造マシン 1 号,2 号が製造するドーナツの重さ X_i, Y_jg は, 未知の母平均値 a, b の独立同分布にしたがう確率変数である. 母分散も未知だが, 1 号と 2 号で等しいことがわかっている.
1 号,2 号で製造したドーナツの重さは次のようだった.
1 号: $51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$
2 号: $55\mathrm{g}, 56\mathrm{g}, 51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 56\mathrm{g}, 54\mathrm{g}.$
2 個のドーナツ製造マシンの製造するドーナツの重さの母平均値に差があるか知りたい. 帰無仮説を H_0: 差はない $a - b = 0$, として, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で両側 2 標本 t 検定をしよう.

片側検定

	両側検定	片側検定
帰無仮説 H_0	等しい	以下である
対立仮説 H_1	等しくない	より大きい (小さい)

カイ 2 乗検定, t 検定などにも両側と片側の区別がある．今までは両側だけをやってきた．

L13-Q4

Quiz(片側 2 標本 t 検定)

ドーナツ製造マシン 1 号を改造して 3 号を作った, 製造するドーナツの重さの母分散は 1 号のままで, 母平均値は変わらないか小さくなったはずである.

1 号,3 号で製造したドーナツの重さは次のようだった.

1 号: $51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 47\mathrm{g}, 50\mathrm{g}.$

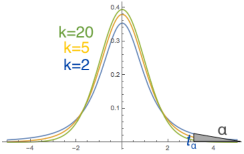
3 号: $55\mathrm{g}, 56\mathrm{g}, 51\mathrm{g}, 52\mathrm{g}, 56\mathrm{g}, 54\mathrm{g}.$

3 号の製造するドーナツの重さの母平均値が 1 号よりも小さいかどうか知りたい. 帰無仮説を H_0: 以上である $a - b \geq 0$, として, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で片側 2 標本 t 検定をしよう.

t 分布表

$\alpha = P(T > t_\alpha(k))$ となる, $t_\alpha(k)$ の値の表. k は自由度.

$k\backslash\alpha$	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.00025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
$+\infty$	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291



Math ラウンジ=チューター
月火水木昼, 1-614
各科目のレポート, 課題などその他の質問・相談歓迎です.
スケジュール 2015-07-17 金 5 1-609 実習室でやります
2015-07-31 金 5 ファイナルトライアル 40 ピーナッツ 外部記憶ペーパー使用可.

manaba 出席カード提出
https://attend.ryukoku.ac.jp