連続的な確率分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

使える統計! L09(2013-12-04 Wed)

今日の目標　連続的な確率分布で,

1. 確率密度関数から確率が求められる
2. 正規分布のグラフが描ける
3. 表から正規分布に関わる確率が求められる

http://hig3.net

L08-S2
Quiz 解答:離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

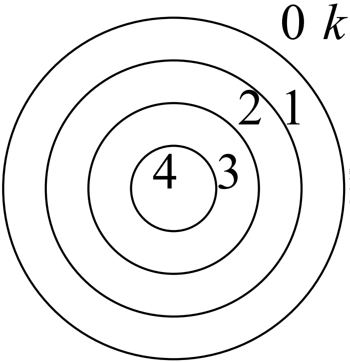
1. 母平均値 $= -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{6} = 1.67.$
2. 母分散 $= (-1 - \frac{1}{6})^2 \cdot \frac{1}{3} + (0 - \frac{1}{6})^2 \cdot \frac{5}{12} + (2 - \frac{1}{6})^2 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{6} = \frac{47}{36} = 1.31.$
3. 母標準偏差 $= \sqrt{\frac{47}{36}} = 1.14.$

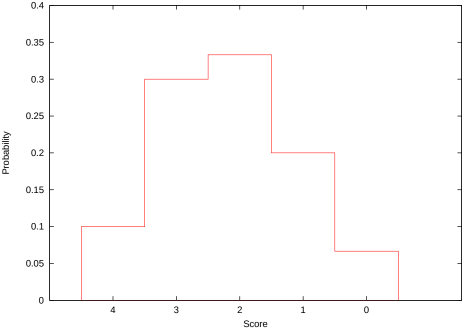
ここまで来たよ

1. 復習:確率分布の平均値・分散・標準偏差
2. 連続的な確率分布
   - 連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
   - ふつうの正規分布

あるプレイヤーのダーツの得点確率

得点: 的の真ん中から順に 4,3,2,1,0 点





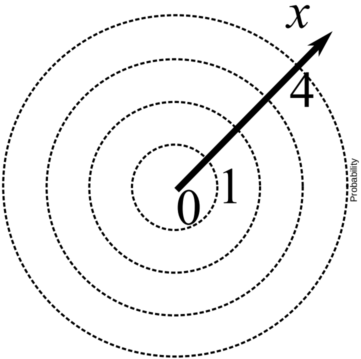
離散的な確率分布

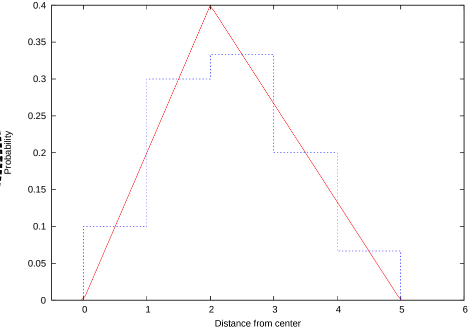
L09-Q1

点数が 3 以上である確率は?

ダーツの的の中心からの距離の確率

的の真ん中からの距離 x.





$x = 0.5$cm と $x = 0.9$cm への当たりやすさは違うのにどっちも 4 点.

1cm を境に $\boxed{}$ 点, $\boxed{}$ 点だけど, 当たりやすさは 急に変わるわけじゃない.

これを表現したい. $\rightsquigarrow$ 当たりやすさは距離 x の関数 $p(x)$ で表される!

連続的な確率分布 $\boxed{}$ $p(x)$

ここまで来たよ

1. 復習:確率分布の平均値・分散・標準偏差
2. 連続的な確率分布
   - 連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
   - ふつうの正規分布

確率密度関数 $p(x)$ の意味

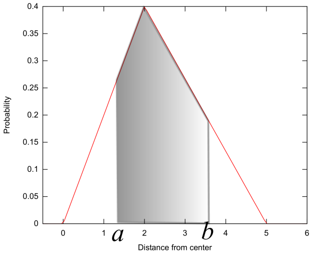
確率密度関数 $p(x)$ の意味

$p(x)$ が大きいほど，その値 x はでやすい．$p(x) \geq 0$.

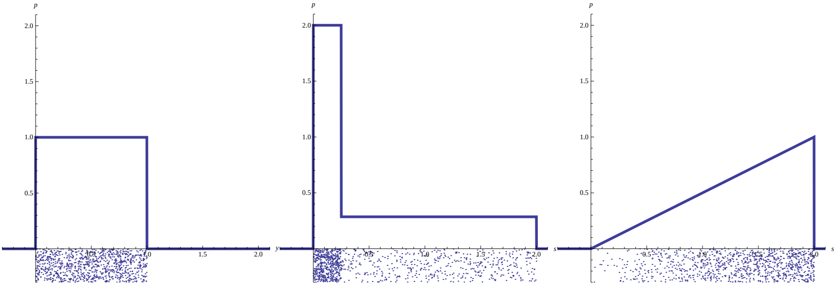
$$
\begin{aligned}
&(a < X < b \text{ となる確率}) \\
=&(y = p(x), y = 0, x = a, x = b \text{ に囲まれた部分の面積})
\end{aligned}
$$

じゃあ，ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.

全確率 $= 1 =$ ($p(x)$ のグラフの下の全体の面積)



確率密度関数の例



図形の面積の公式集

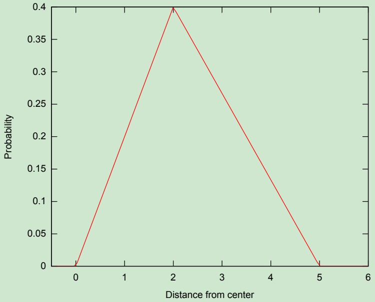
- 長方形の面積=底辺 × 高さ
- 三角形の面積=底辺 × 高さ $\times\frac{1}{2}$.
- 台形の面積=(上底 + 下底)× 高さ $\times\frac{1}{2}$.

L09-Q2

Quiz(確率密度関数と確率)

図の確率密度関数で, 次の確率を求めよう.

1. $x \leq 1.5$ となる確率
2. $1 \leq x \leq 6$ となる確率

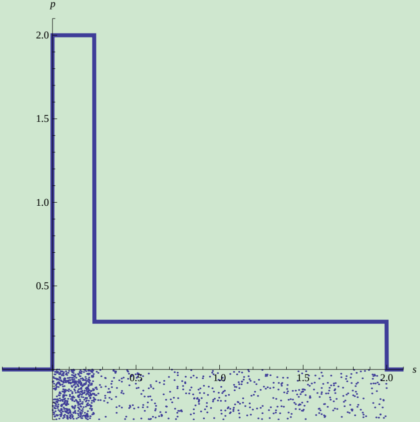


L09-Q3

Quiz(確率密度関数と確率)

図の確率密度関数で, $X > \frac{1}{2}$ となる確率は?

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{2}{8}$
3. $\frac{3}{8}$
4. $\frac{4}{8}$
5. $\frac{5}{8}$
6. $\frac{6}{8}$
7. $\frac{7}{8}$
8. 1
9. 2
10. 0



ここまで来たよ

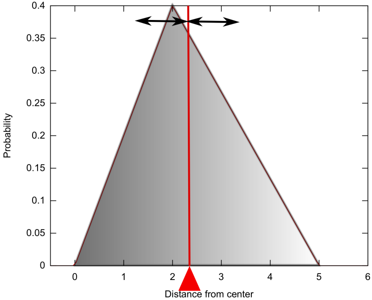
1. 復習:確率分布の平均値・分散・標準偏差
2. 連続的な確率分布
   - 連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
   - ふつうの正規分布

連続的な確率分布の母平均値と母分散

ギリシャ文字 μ $\boxed{}$, σ $\boxed{}$.

$$母平均値\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, \mathrm{d}x = そこを支えたら釣り合う位置$$

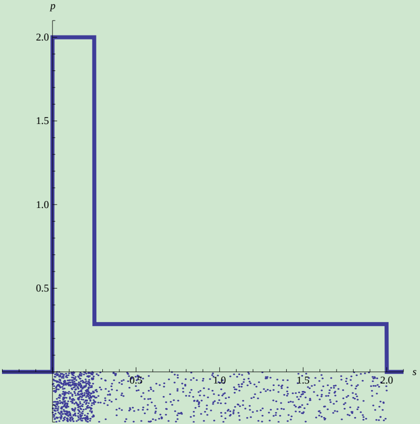
$$母分散\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, p(x)\, \mathrm{d}x = うーん,\ グラフの横幅の\ 2\ 乗$$



L09-Q4

Quiz(確率密度関数と確率)

図の確率密度関数で, 母平均値はどれに一番近い?

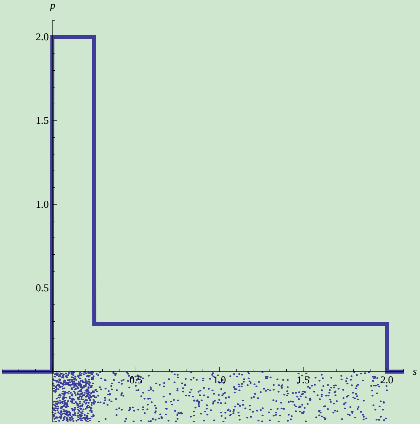


1. 0
2. 0.25
3. 0.50
4. 1
5. 1.5
6. 2

L09-Q5

Quiz(確率密度関数と確率)

図の確率密度関数で, 母標準偏差ははどれに一番近い?



1. 0
2. 0.1
3. 0.6
4. 0.8
5. 1.2
6. 1.5
7. 2

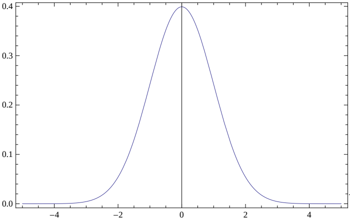
標準正規分布 (ガウス分布)

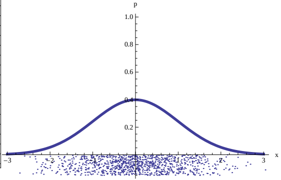
とても有名な連続的な確率分布.

標準正規分布 $N(0,1)$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (\text{定数 } \mathrm{e} = 2.718\cdots).$$

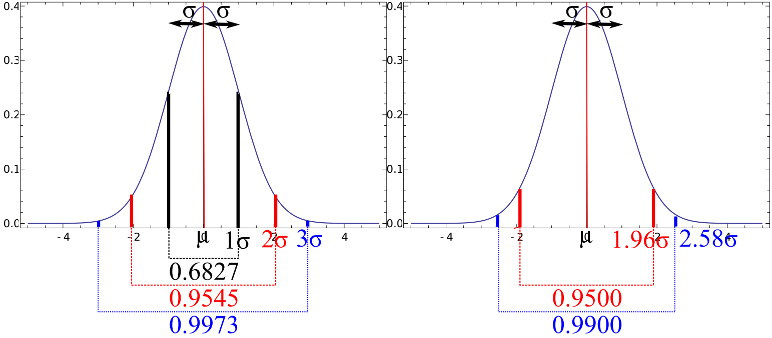
母平均値 $\mu = 0$, 分散 $\sigma^2 = 1$.





標準正規分布 (ガウス分布) のグラフに関係した面積をおぼえよう!

いまは $\mu = 0, \sigma = 1$ と思ってね.

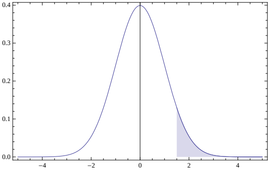


次のページの表さえあれば, 導ける.

標準正規確率表 (上側確率 $Q(z)$)

$z \geq z_0$ となる確率 $= Q(z_0) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(z_0/\sqrt{2})$. よく統計の教科書の付録に表が載ってる.

z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



L09-Q6

Quiz(標準正規分布の確率)

X は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. $X < -2$ となる確率は?

L09-Q7

Quiz(標準正規分布の確率)

某ドーナツ店のチョコ計量器を考える．この計量器で 1 個のチョコファッションドーナツにチョコをかけるとき，設定値 (g) からのずれ X は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．
'設定より??g 以上少ないチョコがかけられているのは 1%だけ' と言える?

1. 0g
2. 1.00g
3. 1.65g
4. 1.96g
5. 2.00g
6. 2.33g
7. 2.58g

ここまで来たよ

1. 復習:確率分布の平均値・分散・標準偏差
2. 連続的な確率分布
   - 連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
   - ふつうの正規分布

正規分布

正規分布 $N(0, \sigma^2)$

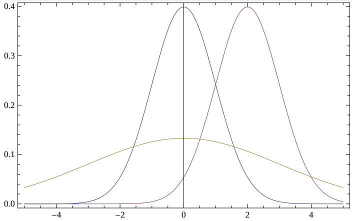
標準正規分布を, 横に σ 倍, 縦に $\frac{1}{\sigma}$ 倍拡大したもの

母平均値 $\boxed{}$, 母分散 $\boxed{}$

正規分布 $N(\mu, 1)$

標準正規分布を, 横に μ だけ移動したもの

母平均値 $\boxed{}$, 母分散 $\boxed{}$

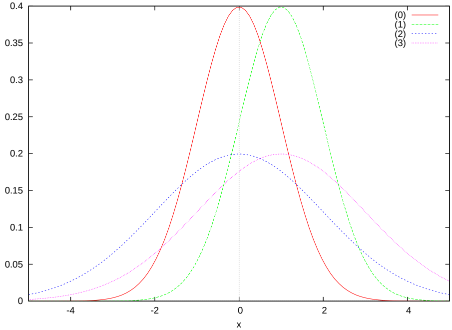


正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

標準正規分布を, 横に σ 倍, 縦に $\frac{1}{\sigma}$ 倍拡大したあと, 横に μ だけ平行移動したもの

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

母平均値 μ, 分散 σ^2.



L09-Q8

Quiz(正規分布のグラフ)

母平均値 3, 母分散 4 の正規分布のグラフの概形を描こう.

連絡

- きょうは紙 1 枚提出.
- 年末の不規則開講

	2013-12-11 水	2013-12-18 水
学籍番号末尾が 1,3,5,7,9	L10 (e ラーニング)	L11 (いつもの教室)
学籍番号が偶数 2,4,6,8,0	L11 (いつもの教室)	L10 (e ラーニング)

  該当しない方には**出席しないでください**.
  L10 は, 上記の水曜日以降次週の火曜日までに e ラーニングコース
  `http://moodle.media.ryukoku.ac.jp` から受講してください.
- いつか 台風の分の補講
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね. 関数電卓でも関数電卓でなくてもかまいません. 携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- ファイナルトライアルでは携帯電話 (のアプリの電卓) は使えません.

クリッカー学籍番号送信の方法