中心極限定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

使える統計! L11b(2013-12-18 Wed)

今日の目標

1. (標準でない) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数のグラフが描け, 表から確率が求められる
2. 中心極限定理を説明できる

http://hig3.net

L09-S2
Quiz 解答:確率密度関数と確率

1. $x \leq 1.5$ となる確率部分の三角形の面積を求めて, $\frac{1}{2} \times 1.5 \times 0.3 = 0.225.$
2. $x \leq$ となる台形と三角形をあわせた図形の面積を求める. この 2 つの図形の面積を加えればよい. または, $x < 1$ の三角形の面積を全事象の確率 1 から引けばよい. $1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 0.2 = 0.9.$

L09-S6

Quiz 解答:標準正規分布の確率

標準正規分布の確率密度関数は偶関数 ($x = 0$ に関して対称) なので,

$$\begin{aligned}&(X < -2 \text{ となる確率})\\=&(X > +2 \text{ となる確率})\\=&Q(2) = (\text{表より}) = 0.0228.\end{aligned}$$

または,

$$\begin{aligned}&(X < -2 \text{ となる確率})\\=&\frac{1}{2}[(X < -2 \text{ となる確率}) + (X > +2 \text{ となる確率})]\\=&\frac{1}{2}[1 - (-2 < X < +2 \text{ となる確率})]\\=&(\text{図より}) = \frac{1}{2}(1 - 0.9545) = 0.0228.\end{aligned}$$

ここまで来たよ

1. 復習:連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
2. 中心極限定理
   - ふつうの正規分布
   - 予想と実験してみよう
   - 中心極限定理

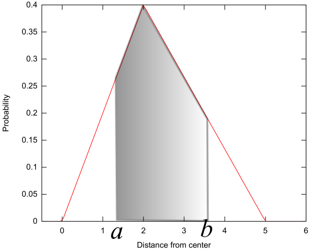
確率密度関数 $p(x)$ の意味

確率密度関数 $p(x)$ の意味

$p(x)$ が大きいほど, その値 x はでやすい. $p(x) \geq 0$.

$$(a < X < b \text{となる確率})$$
$$= (y = p(x), y = 0, x = a, x = b \text{に囲まれた部分の面積})$$

じゃあ, ちょうど距離 $x = a$ cm となる確率は? $\rightsquigarrow \boxed{}$.
全確率 $= 1 =$ ($p(x)$ のグラフの下の全体の面積)



ここまで来たよ

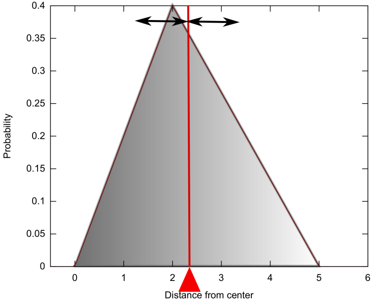
1. 復習:連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
2. 中心極限定理
   - ふつうの正規分布
   - 予想と実験してみよう
   - 中心極限定理

連続的な確率分布の母平均値と母分散

ギリシャ文字 μ $\boxed{}$, σ $\boxed{}$.

$$母平均値\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, \mathrm{d}x = そこを支えたら釣り合う位置$$

$$母分散\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, p(x)\, \mathrm{d}x = う〜ん, グラフの横幅の 2 乗$$



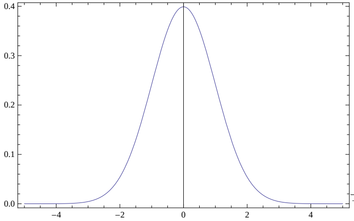
標準正規分布 (ガウス分布)

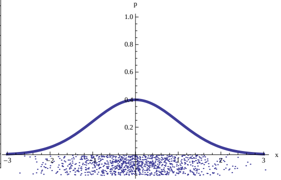
とても有名な連続的な確率分布.

標準正規分布 $N(0,1)$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (\text{定数 } \mathrm{e} = 2.718\cdots).$$

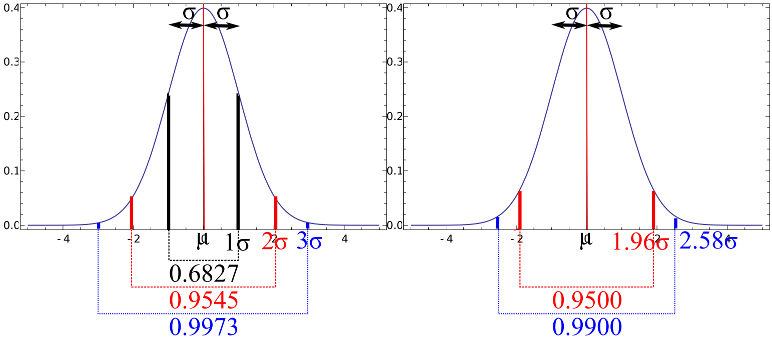
母平均値 $\mu = 0$, 分散 $\sigma^2 = 1$.





標準正規分布 (ガウス分布) のグラフに関係した面積をおぼえよう!

いまは $\mu = 0, \sigma = 1$ と思ってね.

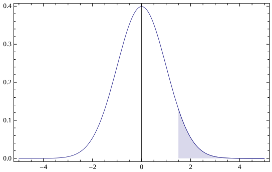


次のページの表さえあれば, 導ける.

標準正規確率表 (上側確率 $Q(z)$)

$z \geq z_0$ となる確率 $= Q(z_0) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(z_0/\sqrt{2})$. よく統計の教科書の付録に表が載ってる.

z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



ここまで来たよ

1. 復習:連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
2. 中心極限定理
   - ふつうの正規分布
   - 予想と実験してみよう
   - 中心極限定理

正規分布

正規分布 $N(0,\sigma^2)$

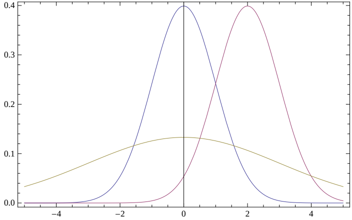
標準正規分布 $N(0,1)$ のグラフを，横に σ 倍，縦に $\frac{1}{\sigma}$ 倍拡大したもの

母平均値 $\boxed{}$，母分散 $\boxed{}$

正規分布 $N(\mu,1)$

標準正規分布 $N(0,1)$ のグラフを，横に μ だけ移動したもの

母平均値 $\boxed{}$，母分散 $\boxed{}$

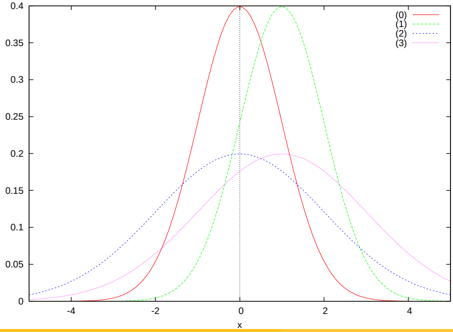


正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

標準正規分布 $N(0,1)$ のグラフを,

- 横に σ 倍, 縦に $\frac{1}{\sigma}$ 倍拡大し
- 横に μ だけ平行移動したもの

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



N(つりあう位置, (幅)^2)
N(母平均値μ, 母分散σ^2).

L11b-Q1

Quiz(正規分布のグラフ)

母平均値 3, 母分散 4 の正規分布のグラフの概形を描こう.

L11b-Q2

Quiz(正規分布の確率)

母平均値 3, 母分散 4 の正規分布で,

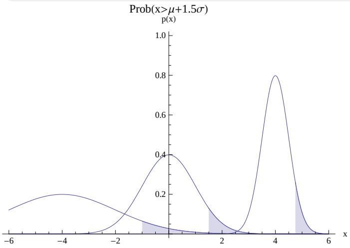
1. $x \geq 5$ となる確率を求めよう.
2. $+1 \leq x \leq 7$ となる確率を求めよう.

正規分布と標準正規分布の関係

$N(\mu, \sigma^2)$ に従う X は, 標準得点 (z-score)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

に直すと, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. そこで, Z で確率を求めてそのまま答えればいい.



L11b-Q3

Quiz(正規分布の確率)

1. 母平均 0, 母分散 1^2 の正規分布で, $0.5 \le x \le 0.7$ となる確率を求めよう.
2. 母平均 0, 母分散 2^2 の正規分布で, $0.5 \le x \le 0.7$ となる確率を求めよう.
3. 母平均 3, 母分散 2^2 の正規分布で, $4.0 \le x \le 4.4$ となる確率を求めよう.

L11b-Q4

Quiz(正規分布の確率)

あるお店で, 琵琶湖特産瀬田シジミ 500g パックは店主の気まぐれの ‘時価’ で販売される. 長年の調査から, その価格は, 母平均値 2000 円, 母分散 40000 円^2 の正規分布に従うことがわかっている.
500g 買うためには, お金をいくら財布に入れておけば十分か答えよう. ただし, 絶対に買えるように, というと何億円あっても足りないので, 40 回に 1 回は足りなくて買えなくてもかまわないとする.

ここまで来たよ

1. 復習:連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
2. 中心極限定理
   - ふつうの正規分布
   - 予想と実験してみよう
   - 中心極限定理

実験 1

サイコロを 1 回振る $\rightsquigarrow X$ の値.

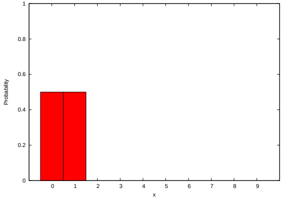
ルール

サイコロの目	値 X	確率
1,2,3	$X=0$	$\frac{1}{2}$
4,5,6	$X=1$	$\frac{1}{2}$

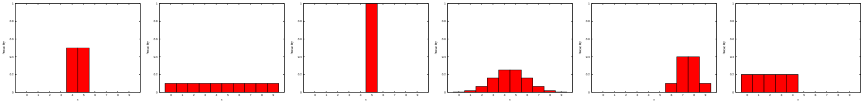
この確率分布の

- 母平均値 $= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 母分散 $= (0-\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

n 回サイコロをふって, 和 $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.



を 9 回ふったら和はどうなる?($n = 9$).



$n = 1, 4, 9$ でのあなたの結果

$Y_1 = X_1$	$Y_4 = X_1 + \cdots + X_4$	$Y_9 = X_1 + \cdots + X_9$

実験その 2

サイコロを 1 回振る $\rightsquigarrow$ X の値.

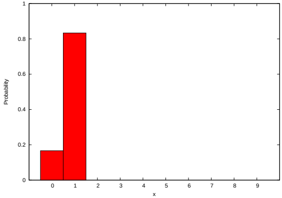
ルール

サイコロの目	X の値 X	確率
1	$X=0$	$\frac{1}{6}$
2,3,...,6	$X=1$	$\frac{5}{6}$

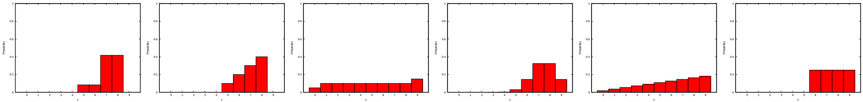
この確率分布の

- 母平均値 $= \cdots = \frac{5}{6}$
- 母分散 $= \cdots = \frac{5}{36}$

n 回サイコロをふって, $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.



を 9 回 $(n = 9)$



$n = 1, 4, 9$ でのあなたの結果

$Y_1 = X_1$	$Y_4 = X_1 + \cdots + X_4$	$Y_9 = X_1 + \cdots + X_9$

ここまで来たよ

1. 復習:連続的な確率分布
   - 確率密度関数
   - 連続的な確率分布の母平均値と母分散
2. 中心極限定理
   - ふつうの正規分布
   - 予想と実験してみよう
   - 中心極限定理

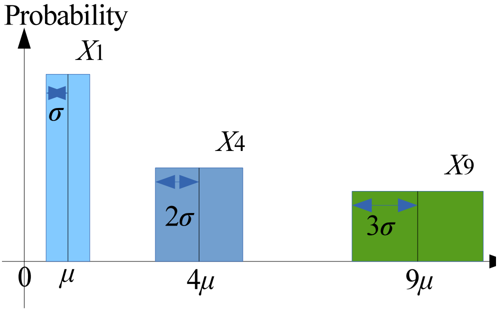
独立同分布の X_i の和の母平均値と母分散

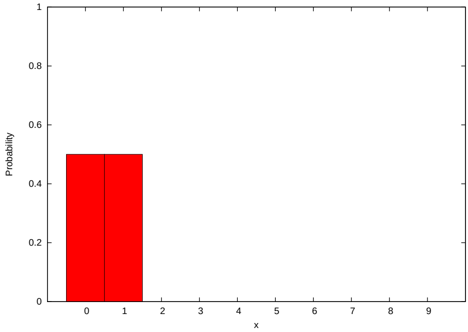
$X_1, \ldots, X_n$ が, 独立で, 同じ確率分布 (正規分布でなくてもいい) に従うとする ($X_1, \ldots, X_n$ は独立同分布に従うという). そしてさらに,

- 母平均値 μ
- 母分散 σ^2

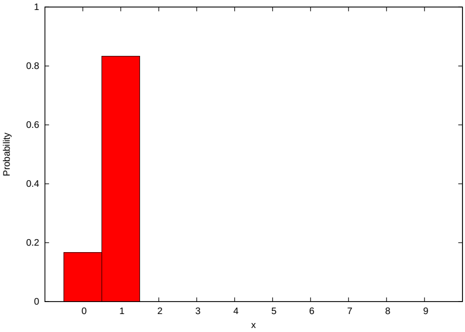
であるとする.
このとき, $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ の確率分布は, $n \to +\infty$ で

- 母平均値 $\boxed{}$
- 母分散 $\boxed{}$


Probability
X_1
σ
X_4
2σ
X_9
3σ
0
μ
4μ
9μ



Probability
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
x


Probability
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
x

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$X_1, \ldots, X_n$ が, 独立で, 同じ確率分布 (正規分布でなくてもいい) に従うとする ($X_1, \ldots, X_n$ は独立同分布に従うという). そしてさらに,

- 母平均値 μ
- 母分散 σ^2

であるとする.
このとき, $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ の確率分布は, $n \to +\infty$ で

- 母平均値 $\boxed{}$
- 母分散 $\boxed{}$

の $\boxed{}$ に近づいていく.

$N \to +\infty$ では分布に個性がなくなる!

L11b-Q5

Quiz(正規分布の確率)

あるお店で，琵琶湖特産瀬田シジミ 500g パックは店主の気まぐれの '時価' で販売される．長年の調査から，その価格は毎日独立で，店主の個性に由来する '何かへんな分布' に従うことがわかっている．ただし，母平均値 2000 円，母分散 40000 円^2 である．
30 日間毎日 1 パックずつ仕入れるとして，30 日間に支払う総額は，どんな分布に従う?

連絡

- きょうは紙 1 枚+アンケート 2 枚提出.
- 年末の不規則開講

	2013-12-11 水	2013-12-18 水
学籍番号末尾が 1,3,5,7,9	L10 (e ラーニング)	L11 (いつもの教室)
学籍番号末尾が 2,4,6,8,0	L11 (いつもの教室)	L10 (e ラーニング)

  該当しない方には**出席しないでください**.
  L10 は, 上記の水曜日以降次週の火曜日までに e ラーニングコース `http://moodle.media.ryukoku.ac.jp` から受講してください.
- いつか 台風の分の補講.
- 2014-01-08 水 3 はふつう.
- 加減乗除と平方根 (ルート) の使える電卓持ってきてね. 関数電卓でも関数電卓でなくてもかまいません. 携帯電話の機能・アプリでもかまいません.
- ファイナルトライアルでは携帯電話 (のアプリの電卓) は使えません.