

13 今週の quiz: Strained Coordinate の方法 による Duffing の微分方程式の摂動解

微分方程式

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + \varepsilon \omega^2 x(t)^3 = 0, \quad x(0) = a, \dot{x}(0) = 0 \quad (1)$$

を, 展開

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(s) + \varepsilon x_1(s) + \cdots \\ t &= s + \varepsilon t_1(s) + \cdots \end{aligned}$$

で解くことを考える.

1. 関係

$$\frac{d^2}{dt^2} = (-\varepsilon t_1''(s) + \cdots) \frac{d}{ds} + (1 - \varepsilon t_1'(s) + \cdots)^2 \frac{d^2}{ds^2} \quad (2)$$

を示せ.

2. ε の 0 次の項から, x_0 の従う微分方程式をたて, x_0 を求めよ.
3. ε の 1 次の項から, x_1 の従う微分方程式をたて, 永年項が現れないという条件から, $t_1(s)$ を決定せよ.
4. $t = s + \varepsilon t_1(s)$ を s について解き, $x_0(s)$ に代入して, $x(t)$ の近似解を求めよ.

¹<http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/theorphys/>

²<mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501