

### 3 1次元ランダムウォークの再帰性

1次元のランダムウォークが、正負の方向にそれぞれ確率  $p, q$  で jump するときに再帰的であるかどうかを次のようにして調べよう。

時刻 0 で  $x = 0$  にいた粒子が、時刻  $2t$  で 0 に戻ってくる確率  $P(0, 2t)$  は、 $2t$  回の移動のうち  $t$  回が右、 $t$  回が左である確率なので、

$$P(0, 2t) = \binom{2t}{t} p^t q^t \quad (1)$$

となる。

場所  $x = 0$  で粒子がすごす時間の合計の期待値

$$\sum_{t=0}^{\infty} P(0, t) = \sum_{t=0}^{\infty} P(0, 2t) \quad (2)$$

が発散すれば再帰的、有限にとどまれば非再帰的である。

この和が発散するかどうかを、Stirling の公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3)$$

を用いて評価しよう。  $p, q$  の値によって違うはず。数学的に厳密でなくていいよ。

---

<sup>0</sup>Copyright ©2003 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

<sup>1</sup><http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/theorphys/> これは <http://hig3.net/> からもたどれます。

<sup>2</sup><mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,  
へや 1-508, でんわ 077-543-7501