

## 11 フォッカー-プランク方程式

問題の  $W$  の定義で,  $x' = x + r$  と置き直すと,

$$W(x+r|x) = \begin{cases} p & (0 \leq r \leq 1) \\ q & (-1 \leq r < 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1)$$

となるので,

$$C_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} rW(x+r|x)dr = q \int_{-1}^0 r dr + p \int_0^1 r dr = \frac{1}{2}(p-q). \quad (2)$$

$$C_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r^2W(x+r|x)dr = q \int_{-1}^0 r^2 dr + p \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3}(p+q). \quad (3)$$

フォッカー-プランク方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{1}{2}(p-q)\frac{\partial}{\partial x}P(x,t) + \frac{1}{6}(p+q)\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t). \quad (4)$$

これはドリフト項付き拡散方程式と同じ形. 正のほうに流れるのは  $p > q$  のとき.

## 12 マルコフ連鎖と遷移行列

マルコフ連鎖 (離散時間, 離散空間 (状態)) の CK 方程式は,

$$P(x,t+1) = \sum_{x'} T_1(x|x')P(x',t) \quad (5)$$

である. 遷移確率  $T_1(x|x')$  を行列  $M = (M_{xx'}) = (T_1(x|x'))$  (遷移行列といわれる),  $P(x,t)$  をベクトル  $\vec{u}(t) = {}^t(P(1,t), P(2,t), \dots)$  と思うと, 行列とベクトルの積を使って,

$$\vec{u}(t+1) = M\vec{u}(t), \quad \text{すなわち} \quad \vec{u}(t) = M^t\vec{u}(0) \quad (6)$$

と書き直せる.

次の遷移行列に従う  $x = 1, 2, 3$  の 3 状態 (3 点) からなるマルコフ連鎖を考えよう.

$$T_1(x|x') = M_{xx'} = \begin{array}{c|ccc} x \backslash x' & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 7/10 & 1/10 & 1/30 \\ 2 & 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3 & 1/10 & 3/10 & 23/30 \end{array} \quad (7)$$

<sup>0</sup>Copyright ©2003 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

<sup>1</sup><http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/theorphys/> <http://hig3.net/> からいける.

<sup>2</sup><mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,

へや 1-508, でんわ 077-543-7501

$M$  の固有値固有ベクトルは

$$\lambda = \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 1, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

である。極限  $t \rightarrow \infty$  での確率  $\vec{u}(\infty) = \begin{pmatrix} P(1,+\infty) \\ P(2,+\infty) \\ P(3,+\infty) \end{pmatrix}$  を求めよう。