

理論物理学特論プチテスト

樋口さぶろお*¹ 配布: 2012-06-15 Fri 更新: Time-stamp: "2012-06-15 Fri 07:39 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. 電卓使用可. 数学の試験なら有理数で答えるべきところを, (3桁程度の) 小数で答えてもかまわない.

1

次の 2 変数データ (x, y) を考える.

x	1	3	4	5	7
y	5	11	14	15	20

1. x, y の標本平均をそれぞれ求めよう.
2. 平方和 S_{xx}, S_{yy} , 偏差和 S_{xy} を計算しよう.
3. 標本分散 V_{xx}, V_{yy} , 標本共分散 $C(x, y)$ を求めよう.
4. 線形単回帰 $\hat{y} = \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_0$ の回帰係数 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ を求めよう. 寄与率 R^2 を求めよう.

2

次の 2 元分割表 (クロス集計表) について, ピアソンの χ^2 統計量を求めよう.

	X	Y
A	21	19
B	69	11

*¹ Copyright ©2012Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1号館 5 階 502

3

$p + 1$ 変量データの, n 組の標本 $(y_i, x_{i1}, \dots, x_{ip})$ ($i = 1, \dots, n$) があるとき, 行列 X を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{1p} - \bar{x}_p \\ 1 & x_{21} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{2p} - \bar{x}_p \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n1} - \bar{x}_1 & x_{n2} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{np} - \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

とおく.

$p = 2$ すなわち $2 + 1$ 変量データ

x_1	1	3	4	5	7
x_2	2	4	2	4	3
y	12	22	18	26	27

を考える.

1. この $2 + 1$ 変量データに対して, 行列 X , ${}^t X X$, $({}^t X X)^{-1}$ をそれぞれ求めよう.
2. この $2 + 1$ 変量データに対して, 行列 $X({}^t X X)^{-1}({}^t X)$ の行, 列の個数をそれぞれ求めよう.

4

次の 3 水準 (A_1, A_2, A_3) の多変量データに対して, 1 元配置の分散分析表を作ろう.

A_1	5	3	4	5	8
A_2	10	8	12	9	11
A_3	21	22	20	18	24

5

2 次元正規分布の確率密度関数 $p(x, y)$ を考える. 平均が $(\mu_x, \mu_y) = (0, 0)$, 分散が $(V_{xx}, V_{yy}) = (4, 9)$, 共分散が $C(x, y) = 5$ である.

原点と $(x, y) = (1, 2)$ の間のマハラノビスの距離を求めよう.

理論物理学特論プチテスト略解

樋口さぶろお*² 配布: 2012-06-15 Fri 更新: Time-stamp: "2012-06-15 Fri 07:39 JST hig"

1

1. $\bar{x} = 4, \bar{y} = 13.$
2. $S_{xx} = 20, S_{yy} = 122, S_{xy} = 49.$
3. $V_{xx} = \frac{1}{5-1} \cdot 20 = 5, V_{yy} = \frac{1}{5-1} \cdot 122 = 30.5, C(x, y) = \frac{1}{5-1} \cdot 49 = 12.25.$
4. $\hat{\beta}_1 = S_{xy}/S_{xx} = \frac{49}{20} = 2.45. \hat{\beta}_0 = -\hat{\beta}_1\bar{x} + \bar{y} = 13 - 2.45 \times 4 = 3.2. R^2 = S_R/S_{yy} = \hat{\beta}_1 S_{xy}/S_{yy} = \frac{2401}{2440} = 0.984.$

2

$$\chi^2 = 81/5 = 16.2$$

3

1. $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, {}^tXX = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, ({}^tXX)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{20}{71} & -\frac{3}{71} \\ 0 & -\frac{3}{71} & +\frac{4}{71} \end{pmatrix}.$
2. $5 \times 5.$

4

分散分析表は

要因	平方和	自由度	平均平方	F_0
A	134×5	$3 - 1 = 2$	335	$335/(11/3)$
E	$14+10+20=44$	$3 \times (5 - 1) = 12$	11/3	
計	714	$15 - 1 = 14$		

*² Copyright ©2012Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

hig@math.ryukoku.ac.jp, <http://hig3.net>(講義のページもここからたどれます), へや:1号館5階502.

5

分散共分散行列は

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

マハラノビスの距離を D とすると,

$$D^2 = ((1 \ 2) - (0 \ 0)) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{5}{11}.$$

よって, $D = \sqrt{\frac{5}{11}}$.