統計モデリング・ポアソン分布・最尤推定

樋口さぶろお

龍谷大学大学院理工学研究科数理情報学専攻

理論物理学特論 L01(2016-09-21 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2016-09-20 Tue 17:42 JST hig"

今日の目標

1. 統計モデリングの例が (自分の研究分野の中から) ひとつ挙げられる
2. ポアソン分布の確率, 平均値, 分散, 期待値が求められる.

http://hig3.net

教科書

久保拓弥 データ解析のための統計モデリング入門, 2012, 岩波書店

成績計算

- 平常点 30 ピーナッツ
- プチテスト 30 ピーナッツ
- レポート 40 ピーナッツ

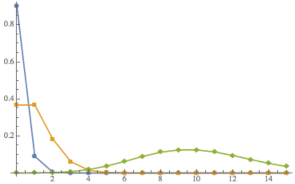
現在の点数は e ラーニングサイトで見られるようになる予定.
授業のページ `http://hig3.net` > (左コラム) 樋口の授業.
オフィスアワー予約なしで科目について質問相談会話できる時間です.
木 6(1-539), 金昼 (1-502). 月火昼も在室時は訪問歓迎. お弁当可.

ポアソン分布

ポアソン分布

離散型確率変数 y が次の確率分布を持つとき, y はパラメタ λ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に従うという.

$$f(y|\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^y}{y!}\mathrm{e}^{-\lambda} & (y = 0, 1, 2, 3, \ldots) \\ 0 & 他 \end{cases}$$



$\mathrm{Po}(0.1), \mathrm{Po}(1), \mathrm{Po}(10)$

意味: 独立に, 時間に比例して, 単位時間に平均すると λ 回起きる事象が, 単位時間内に y 回起きる確率.

離散型確率変数の母期待値

離散型確率変数 $x \in \mathbb{Z}$ に対して, 関数 ϕ の母期待値

$$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \phi(x) f(x).$$

L01-Q1

Quiz(ポアソン分布)

離散型確率変数 X はパラメタ 0.2 のポアソン分布 $\mathrm{Po}(0.2)$ にしたがう.

1. 確率 $P(X = 4)$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

最尤推定

尤度が最大になるようにパラメタの値を推定すること.

L01-Q2

Quiz(ポアソン分布)

あるサッカーチームは, 90 分のゲームで平均 3 点得点できる.

1. ハーフ 45 分間に 0 点である確率は?
2. ハーフ (前半) 0 点 かつ ハーフ (後半) 3 点である確率は?
3. ゲーム 90 分で 3 点であるときに, ハーフ (前半) 0 点, ハーフ (後半) 3 点である確率は?

尤度

確率分布 $f(y|\lambda)$ で, パラメタが λ であるとき, サイズ n のサンプル $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が得られる同時確率は,

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\lambda).$$

尤度 (likelihood)

観測された値 (=考えるサンプル) が $y_1, y_2, \ldots, y_n$ であるとき, λ の関数

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\lambda)$$

を尤度という.

Quiz(正規分布の母数の最尤推定)

未知の母平均値 μ, 母分散 σ^2 の正規分布

$$f(x|\theta) = f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

からサイズ N の標本 $\{x_1, \ldots, x_N\}$ を得た.
対数尤度は $\log L(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \log f(x_i|\mu, \sigma)$ である.

1. $N = 2$ のとき, 対数尤度を最大化することにより μ, σ^2 を最尤推定しよう.
2. 一般の N に対して, 対数尤度を最大化することにより μ, σ^2 を最尤推定しよう.

連絡

- オフィスアワー木 6 金昼