応用ベクトル解析∇ プチテスト

樋口さぶろお[1]　配布: 2005/06/07 Tue 更新: Time-stamp: "2005/06/21 Tue 10:25 hig"

注意

1. **4問60分です．裏もあります**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
5. 2 次元 xy-座標系を使っています．$\boldsymbol{r} = (x, y), \boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$.
6. 各自の点数は, 生協メール (アドレス `t040nnnx@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします. ここに届いたメールは, Web ページ `http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/` で見られます.
7. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
   (a) 1-502 前レターボックスで答案を返却する (他の人が採点後の答案を見る可能性がある).
   (b) 答案を返却せず廃棄する.

   この選択に関わらず, メールによる点数の通知は行ないます.

1

スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = x^3 + 2x^2y$, ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2x^2y, x^3 + 3y)$ を考える．次の式を計算しよう.

1. ∇f
2. $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$

2

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-y, x + y)$ を考える．曲線 C を, 始点 $(0, 0)$, 終点 $(1, \sqrt{3})$ の線分とする.

1. 一般に, ベクトル場が保存的であることの定義を書こう.
2. この $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が保存場であるかどうか答えよう．('判定条件' は証明せずに使っていいです)
3. 線積分 $\int_C \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を計算しよう.

うらにつづく

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (x + y^2 + 1, 2xy + y^2 + 3)$ を考える．

1. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が保存的であることを示そう．(‘判定条件’ は証明せずに使っていいです)
2. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ のポテンシャル $f(\boldsymbol{r})$ を求めよう．(訂正) $\rightarrow \nabla f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V}(r)$ を満たすスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ を求めよう．
3. 線積分 $\int_C \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を計算しよう．ただし, 曲線 C は, $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t, -1+\cos t), (0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi)$ とパラメータ表示され, 始点 $(0, 0)$, 終点 $(2, -1)$ である．

Hint. 3 は 2 と無関係に (も) できます．

4

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (x - 1, 3y - 3)$ を考える．$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s$ を計算しよう．ただし, 閉曲線 C は長さパラメータ s で $\boldsymbol{r}(s) = (1 + \cos s, 1 + \sin s), (0 \leq s \leq 2\pi)$ とパラメータ表示され, 向きは反時計回り．また, C の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は, 閉曲線 C の囲む領域 D の外向きである．

Hint. ガウスの発散定理を証明なしに使ってもよい．でも, べつに使わなくても計算できます．

おしまい

応用ベクトル解析∇プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2005/06/07 Tue 更新: Time-stamp: "2005/06/21 Tue 10:25 hig"

1

1. $\nabla f = (3x^2 + 4xy, 2x^2)$. 小高 式 (6.2)
2. $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 4xy + 3$. 小高 式 (6.6)

2

1. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が保存場であるとは, あるスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ によって, $\boldsymbol{V} = \nabla f$ と書けること. 小高 p.144.
   - ベクトル場の線積分の値が曲線の始点と終点にしかよらない
   - ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が $[\nabla \boldsymbol{V}] = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$ を満たす

   なども, 定義と同値なのでまあおっけー.
2. $[\nabla \boldsymbol{V}] = 1 - (-1) \neq 0$. よって, 保存場ではない. 小高 式 (6.22)
3. 保存場ではないので, 積分路を変更することはできない. 積分路は, $\boldsymbol{r}(t) = (t, \sqrt{3}t), (0 \leq t \leq 1)$ とパラメータ表示される.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r}) &= \int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (-\sqrt{3}t, t + \sqrt{3}t) \cdot (1, \sqrt{3})\, \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

1. $[\nabla \boldsymbol{V}] = 2y - 2y = 0$. 小高 式 (6.22) あるいは, 具体的に $\nabla f = \boldsymbol{V}$ となるスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ を見つけて見せてもいいです.
2. ポテンシャルを $f(\boldsymbol{r})$ とする. 曲線 C_1 を, $(0,0)$ から $(x,0)$ に至る線分, 曲線 C_2 を, $(x,0)$ から $\boldsymbol{r} = (x,y)$ に至る線分とすると, 小高 p.145 より,

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

曲線 C_1, C_2 はそれぞれ, $\boldsymbol{r}_1(t) = (t,0)$, $(t \in [0,x])$, $\boldsymbol{r}_2(t) = (x,t)$, $(t \in [0,y])$ とパラメータ表示され, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} = (1,0)$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t} = (0,1)$. よって,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r}) &= \int_0^x \boldsymbol{V}(t,0) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^y \boldsymbol{V}(x,t) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x (t + 0^2 + 1, 2t \cdot 0 + 0^2 + 3) \cdot (1,0)\ \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^y (x + t^2 + 1, 2xt + t^2 + 3) \cdot (0,1)\ \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + x + 3y. \end{aligned} \tag{3}$$

あるいは, 勘で求めて, $\nabla f = \boldsymbol{V}$ を確認してもよい. そうすれば 1. もやったことになる. なお, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を力の場と思うと, f はこの逆符号のものをさすことが普通です. 今回はどちらでも正解にしています.
3. $f(\boldsymbol{r}(\frac{1}{2}\pi)) - f(\boldsymbol{r}(0)) = f(2,-1) - f(0,0) = \frac{8}{3}$. 小高 式 (6.21)

別解 保存場なので, 始点終点を保ったままで経路を変更しても線積分の値は変わらない. そこで, 3. で $(x,y) = (2,-1)$ とした積分路をとって, 以下は (3) のように計算すればよい.

4

曲線 C のパラメータ表示より, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}(s) = (-\sin s, \cos s)$. 外向きであることに注意して符号を決めると, $\boldsymbol{n}(s) = (\cos s, \sin s)$.

$$\begin{aligned} &\int_C \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{n}(s)\ \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} (V_x(1+\cos s, 1+\sin s), V_y(1+\cos s, 1+\sin s)) \cdot (\cos s, \sin s)\ \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos s, 3\sin s) \cdot (\cos s, \sin s)\ \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin^2 s)\mathrm{d}s = 4\pi. \end{aligned} \tag{4}$$

別解 ガウスの発散定理 小高 式 (8.3) を用いると,

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s = \int_D \nabla \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}S. \tag{5}$$

ただし, D は, $\partial D = C$ となるような領域 (円板)

$$D = \{(x,y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 0\}. \tag{6}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 1 + 3 = 4$ なので,

$$(\text{右辺}) = \int_D 4\ \mathrm{d}S = 4 \times (D\ \text{の面積}) = 4\pi. \tag{7}$$