応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/06/27 Tue 更新: Time-stamp: "2005/06/28 Tue 09:08 hig"

9 略解 – 体積分と球座標

1.

2.

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -v. \tag{1}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_V f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^{3\pi} \mathrm{d}w\ |J|\ (x(u,v,w))^2 \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 u\ \mathrm{d}u \times \int_0^{2\pi} v^3 \mathrm{d}v \times \int_0^{3\pi} 1\ \mathrm{d}w \\ &= \frac{\pi}{2} \times 4\pi^4 \times 3\pi = 6\pi^6 \end{aligned} \tag{2}$$

10 quiz – 渦度

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (-xy+x, xy+y)$ と, 平面の領域 D を考える. ただし, D は $(0,0),(1,0),(0,1)$ を 3 頂点とする三角形の内部.

1. 渦度 $[\nabla \boldsymbol{V}]$ を求めよう.
2. 線積分 $\int_{\partial D} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう. ただし, 積分路の向きは反時計回りとする.
3. 面積分 $\int_D [\nabla \boldsymbol{V}]\mathrm{d}S$ を求めよう. 領域 D は, $\boldsymbol{r}(s,t) = (s,t)$ $(0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1-s)$ とパラメータ表示できることを納得した上でつかってもいい.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

前回の授業の訂正

9.2 で使ってた領域のパラメータ表示は,

$$\boldsymbol{r}(u, v, w) = (u - v, u + 2v, w) \tag{3}$$

が正しいです. 最初だけ直すと, 計算はこれで合います.

球座標のヤコビアンの行列式の (2,2) 成分を書き間違えました.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta. \tag{4}$$

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

球座標などを使った曲面上の面積分　問題 4.9(2)(3)(p.97), 章末問題 [4.5](2)(p.105), 章末問題 [4.8](p.106)

渦度　問題 6.16(p.135), 問題 6.20(p.136), 章末問題 [6.5](p.149)

閉曲線に沿ったベクトル場の線積分とグリーンの定理　問題 8.6(p.178), 問題 8.7(p.178)

渦度ゼロのベクトル場とゼロでないベクトル場

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.132 図 6.9 より引用

pdf バージョンでは図は省略

お知らせ

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます. 自宅での再生には Password が必要です.

UserID:

Password:

http://hig3.net

科目のページ + リクエスト / 質問 / 苦情用掲示板

目次 前回 次回 略解