# 量子力学 I 演習 問題 (第 1 回)

樋口 さぶろお*

1998 年 10 月 15 日

## はじめに

**予備知識**　この演習では, 講義 量子力学 I (清水先生) の進度に同期して問題を解きます. したがって, 量子力学 I の講義を受講せず, この演習だけを受講する場合には, 相当する内容を各自で学習して下さい.

**教科書**　特にありません. 問題のプリントを配布します.

**評価**　出席回数, 授業中に解いた問題, レポートなどにより判定します. 出席重視. 試験は行わない予定.

**通知**　この演習に関する通知は, 16 号館 809B 号室の前の壁, または

URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1/`

または学科の掲示板で行ないます.

**演習の進め方**　授業時間内に問題をレポート用紙などに解いて, それを提出して下さい. これで出席とします. あまり解けなかった場合でも, 授業中に物理を考えていたことがわかるように何か書いて提出して下さい.

暇と興味のある人は, 次の週の火曜日までに, 残った問題を好きなだけ解いて, レポートとして 809B の前のポストに提出して下さい. 次回に問題 (の一部) を解説し, 間に合えばレポートを返却します.

* hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

ただし, 最初のうちは, 講義の要請から, 前半で量子力学に必要な数学を解説し, 後半で問題を解いてもらうという形になります.

### [1-1] アンケート

これまでに量子力学を勉強したことがありますか. どの程度ですか. 特に, 量子力学に関係するどの講義に出席しました (しています) か.

## ベクトルの空間の内積

### [1-2] 複素ベクトルの内積

$\mathbb{C}^3$ の次のベクトルの間の内積を計算せよ.

$$\vec{v_1} = (1, 0, i), \quad \vec{v_2} = (i, 1, 1), \quad \vec{v_3} = (2i + 3, 1, i). \tag{1}$$

### [1-3] 正規直交完全系

次のベクトルの組 $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \rangle$ が $\mathbb{C}^3$ の正規直交完全系であることを確かめよ.

$$\vec{v_1} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, i/\sqrt{3}), \tag{2}$$
$$\vec{v_2} = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -i/\sqrt{6}), \tag{3}$$
$$\vec{v_3} = (1/\sqrt{2}, 0, -i/\sqrt{2}). \tag{4}$$

### [1-4] 正規直交完全系による展開

$\mathbb{C}^3$ のベクトル$\vec{w} = (1 + 2i, i + 1, 3)$ を上の正規直交完全系で展開した時の展開係数を求めよ.

## 関数空間の内積

### [1-5] たかだか 2 次の関数の空間

定義域 $[-1, 1]$ の, たかだか 2 次の関数全体の空間を考える. 関数系

$$\left\langle 1, \quad x, \quad x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle \tag{5}$$

は直交完全系になっている．これを示せ．また規格化せよ．関数 $1+x+x^2$ をこの関数系で展開せよ．

### [1-6]　正規直交完全系

区間 $[0,1]$ で定義された関数で，$f(0)=f(1)=0$ となるもの (のうちある性質を満たすもの) の空間を考える．関数系

$$\langle\sqrt{2}\sin(n\pi x)\rangle_{n\in\mathbb{N}} \tag{6}$$

が正規直交系であることを示せ．実はこれは完全系である．関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4})\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{7}$$

をこの関数系で展開せよ．

## Fourier 級数

### [1-7]　Fourier 級数展開

次の周期 $L$ の周期関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n\mathrm{e}^{2\pi nix/L} \tag{8}$$

と展開した時の $f_n$ を求めよ．なお，基本周期 $-L/2<x<L/2$ だけを下に与える．

$$f(x)=1-\left|\frac{2}{L}x\right| \tag{9}$$

$$f(x)=\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{4\pi x}{L} \tag{10}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<\frac{L}{4})\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{11}$$

## [1-8]　微分方程式の特解

強制振動の方程式

$$mx''(t) + m\gamma x'(t) + m\omega_0^2 x(t) = ma\cos\omega t \tag{12}$$

の特解を, 解 $x(t)$ が

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\omega t) \tag{13}$$

と展開されると仮定して求めよ.

## [1-9]　微分方程式の特解

強制振動の方程式

$$mx''(t) + m\omega_0^2 x(t) = mag(t) \tag{14}$$

の特解 $x(t)$ を, Fourier 級数として求めよ. ただし, $g(t)$ は周期 $T$ の関数で, 基本周期 $[-T/2, T/2]$ で

$$g(t) = \begin{cases} -1 & (-T/2 < t < 0) \\ +1 & (0 < t < T/2) \end{cases}. \tag{15}$$

## [1-10]　Fourier 級数と波動方程式

境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ のもとでの波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{16}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = a\sin\frac{\pi x}{L} \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = b\sin\frac{2\pi x}{L} \tag{18}$$

だったとする. 任意の時刻での $u(x,t)$ を次の手順で求めよ.

1. まず一般解を求める. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\frac{n\pi}{L}x$ と展開できると仮定し, $a_n(t)$ を求めよ.
2. 次に, $u(x,t)$ に対して, $u(x,0)$ での条件を課して, $a_n(t)$ を決定せよ.