量子力学 I 演習 問題 (第 5回)

樋口 さぶろお*

1998 年 11 月 19 日

[5-1] 演算子

次の演算子を x の関数 1(恒等関数), x, $\exp kx$ に作用させてみよ. ただし, $a, b \in \mathbb{C}$ は定数. これらが線型演算子であることを納得せよ.

$$f(x) \mapsto (a + b\tfrac{d}{dx})f(x), \tag{1}$$
$$f(x) \mapsto (a + bx)f(x), \tag{2}$$
$$f(x) \mapsto \int_0^1 dy\ e^{x+y} f(y). \tag{3}$$

また, 次のような演算子は線型でないことを納得せよ.

$$f(x) \mapsto A, \quad f(x) \mapsto f(x) + A, \quad f(x) \mapsto (f(x))^2.$$

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[5-2] 演算子の固有値, 固有関数

次の演算子の固有値, 固有関数 $f(x)$ をみつけよ (それですべてであることは示さなくてもよい).

$$-\frac{d^2}{dx^2},$$
$$-\sqrt{-1}\frac{d}{dx},$$
$$-\frac{d^2}{dx^2}+a,$$
$$a = a\times\mathbf{1}, \quad [\mathbf{1}: f(x)\mapsto f(x)]$$
$$x, \qquad [x: f(x)\mapsto x\times f(x)].$$

[5-3] 固有 vector 展開 (微分方程式)

時刻に依存する vector 変数$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ が, 微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = M\vec{x}(t), \quad \text{ただし} \quad M = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}$$

にしたがって時間発展する. 初期条件は

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次の手順で解 $\vec{x}(t)$ を求めよ.

1. 行列 M の固有値, (規格直交) 固有 vector $\lambda_i, \vec{v}_i$ を求める.
2. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, $\vec{x}(0), \frac{d}{dt}\vec{x}(0)$ をその線型結合としてかく.
3. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, 解を

   $$\vec{v}(t) = \sum_{j=1,2} a_j(t)\vec{v}_j$$

   とかく. このとき, 係数 $a_j(t)$ の従う微分方程式を求め, 解く.
4. 初期条件を満たす解 $\vec{v}(t)$ を求める.

[5-4] 固有関数展開 (微分方程式)

時刻 t にも依存する x の関数 $f(x;t)$ が, 微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x;t) = A f(x;t)$$

にしたがって時間発展する. ただし, A は演算子 $A = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. ($v$ は定数).
初期条件は

$$f(x;t=0) = \exp(-x^2/a^2), \qquad \frac{\partial}{\partial t} f(x;t=0) = 0.$$

次の手順で解 $f(x;t)$ を求めよ.

1. 演算子 A の固有値, 固有関数 $\phi_\lambda(x)$ を求める.
2. 固有関数 $\phi_\lambda(x)$ を基底として, 解を

   $$f(x;t) = \int d\lambda \; F_\lambda(t) \phi_\lambda(x)$$

   とかく. このとき, 係数関数 $F_\lambda(t)$ の従う微分方程式を求め, 解く.
3. $f(x;t=0)$, $\frac{\partial}{\partial t} f(x;t=0)$ を固有関数 $\phi_\lambda(x)$ の線型結合としてかく.
4. 初期条件を満たす解 $f(x;t)$ を求める.