量子力学 I 演習 問題 (第 6 回)

樋口 さぶろお*

1998 年 11 月 26 日

[6-1]　固有 vector 展開 (微分方程式)

時刻に依存する vector 変数 $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ が, 微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = M\vec{x}(t), \quad \text{ただし} \quad M = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}$$

にしたがって時間発展する. 初期条件は

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次の手順で解 $\vec{x}(t)$ を求めよ.

1. 行列 M の固有値, (規格直交) 固有 vector $\lambda_i, \vec{v}_i$ を求める.
2. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, $\vec{x}(0), \frac{d}{dt}\vec{x}(0)$ をその線型結合としてかく.
3. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, 解を

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1,2} a_j(t)\vec{v}_j$$

　とかく. このとき, 係数 $a_j(t)$ の従う微分方程式を求め, 解く.

4. 初期条件を満たす解 $\vec{x}(t)$ を求める.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[6-2] 固有関数展開 (微分方程式)

時刻 t にも依存する x の関数 $f(x;t)$ が, 微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x;t) = Af(x;t)$$

にしたがって時間発展する. ただし, $|x| \to \infty$ で $|f(x)| \to \infty$ とならないような関数だけを考える. ただし, A は演算子 $A = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. ($v$ は定数). 初期条件は

$$f(x;t=0) = \exp(-x^2/a^2), \qquad \frac{\partial}{\partial t} f(x;t=0) = 0.$$

次の手順で解 $f(x;t)$ を求めよ.

1. 演算子 A の固有値, 固有関数 $\phi_\lambda(x)$ を求める.
2. 固有関数 $\phi_\lambda(x)$ を基底として, 解を

   $$f(x;t) = \int d\lambda \; F_\lambda(t) \phi_\lambda(x)$$

   とかく. このとき, 係数関数 $F_\lambda(t)$ の従う微分方程式を求め, 解く.
3. $f(x;t=0)$, $\frac{\partial}{\partial t} f(x;t=0)$ を固有関数 $\phi_\lambda(x)$ の線型結合としてかく.
4. 初期条件を満たす解 $f(x;t)$ を求める.

[6-3] Ket vector の時間発展

時間 t に依存する ket vector $|\psi(t)\rangle$ が, 微分方程式

$$i \frac{t}{dt} |\psi(t)\rangle = A |\psi(t)\rangle \tag{1}$$

にしたがって時間発展する. A は演算子.

1. 演算子 A の固有値, 固有 ket vector を$\lambda_j, |\phi_j\rangle$ とする. 系 $|\phi_j\rangle$ が正規直交完全系をなしているとき,

   $$A = \sum_j |\phi_j\rangle \lambda_j \langle \phi_j| \tag{2}$$

   であることを示せ.
2. 係数 $\langle \phi_j | \psi(t) \rangle$ の時間発展を求めよ.

3. $|\psi(t)\rangle$ の時間発展が

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j \mathrm{e}^{-i\lambda_j t} \langle\phi_j|\psi(0)\rangle \, |\phi_j\rangle \tag{3}$$

であることを示せ.

[6-4] 対角化の応用: 連成振動

下のような振動子系で, 振動の一般解を求めよ. ただし, x_i はつりあいの位置からの変位とする.

[6-5] Fourier 変換と波動方程式

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{4}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = f(x) := \begin{cases} u_0 \times (1 - |x/a|) & (|x| < a), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0$$

だったとする. 以後の時刻での $u(x,t)$ を, 次の手順で求めよ.

1. Fourier 積分表示 $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk a(k,t)\mathrm{e}^{ikx}$ を代入して, $a(k,t)$ の満たす微分方程式を求める.
2. $u(x,0)$, $\dot{u}(x,0)$ を Fourier 変換して $a(k,0), \dot{a}(k,0)$ を求める.
3. 時間について積分して, $a(k,t)$ を求める.
4. 逆 Fourier 変換は, 少し面倒なのでしなくてよい.