量子力学 I 演習 問題 (第 8回)

樋口 さぶろお*

1998 年 12 月 10 日

[8-1] 正規直交完全系

1. 関数系 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考える．この関数系が正規直交系であるということの定義を, bra, ket 記号 $\langle , \rangle$ を用いて書け.
2. 以下, この関数系が正規直交系であるとする．ある関数 ψ が, 係数 $c_k \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \phi_k(x) \tag{1}$$

   と表されているとする．$c_k = \langle \phi_k | \psi \rangle$ を示せ.
3. 任意の波動関数 ψ が, ある係数 $c_k \in \mathbb{C}$ を用いて, 式 (1) のように表されるとき, 関数系 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は完全系であるという．完全系であることと, ‘閉包の式’

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\phi_k\rangle \langle \phi_k| \tag{2}$$

   が成立することとが同値であることを示せ.

[8-2] Bra , ket vectors

演算子 A の, 固有値 λ の固有状態を $|\psi_\lambda\rangle$ とするしばしば, $|\psi_\lambda\rangle = |\lambda\rangle$ という略記が用いられる.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

例えば, 演算子 $\hat{x}$ を, x 倍する演算子 $x\times$ とする. その, 固有値 x_0 の固有状態を $|x_0\rangle$ とすると

$$\hat{x}\,|x_0\rangle = x_0\,|x_0\rangle \tag{3}$$

である.

1. $|x_0\rangle$ に対応する関数は, $\delta(x-x_0)$ なのだった. $\langle x_0|x_1\rangle$ を求めよ.
2. 演算子 $\hat{p}=-i\frac{\partial}{\partial x}$ とする. その固有値 p_0 の固有状態を $|p_0\rangle$ とかく. $|p_0\rangle$ に対応する関数は, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ip_0x}$ なのだった. $\langle p_0|p_1\rangle$ を求めよ.
3. $\langle x_0|p_0\rangle, \langle p_0|x_0\rangle$ を求めよ.
4. 関数系 $\{|x_0\rangle\}_{x_0\in\mathbb{R}}$, $\{|p_0\rangle\}_{p_0\in\mathbb{R}}$ はいずれも完全系をなすので, 閉包の式

$$\int dx_0\,|x_0\rangle\,\langle x_0| = \int dp_0\,|p_0\rangle\,\langle p_0| = 1 \tag{4}$$

   がなりたつ.
   任意の状態 $|\psi\rangle$ について,

$$\langle p_0|\psi\rangle = \int dx_0\langle p_0|x_0\rangle\langle x_0|\psi\rangle,$$
$$\langle x_0|\psi\rangle = \int dp_0\langle x_0|p_0\rangle\langle p_0|\psi\rangle.$$

   が成り立つことを示せ. それが Fourier 変化と逆変換であり $\langle x_0|\psi\rangle$ が $\psi(x_0)$, $\langle p_0|\psi\rangle$ がその Fourier 変換であることを説明せよ.

[8-3] 射影演算子

複素内積のはいった線型空間 V を考える. 線型部分空間 $W\subset V$ と, その直交補空間 $W_\perp\subset V$ への直和分解 $V=W\oplus W_\perp$ を考える. 状態 vector $|\psi\rangle\in V$ は,

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\,, \quad |\psi_1\rangle\in W, \quad |\psi_2\rangle\in W_\perp, \tag{5}$$

と一意的に分解される. 状態 vector $|\psi\rangle\in V$ を, $|\psi_1\rangle\in W$ に対応させる演算子 P を, W への射影演算子という.

1. P が線型であること, $P^2=P$ を示せ.
2. P の固有値は $0,1$ に限られることを示せ.
3. 規格化された状態 $|\phi\rangle$ に張られる 1 次元部分空間 $\mathbb{C}\,|\phi\rangle$ への射影演算子は $|\phi\rangle\,\langle\phi|$ であることを示せ.

[8-4] スペクトル分解

複素内積のはいった線型空間 V が, $V = \oplus_i V_i$ のように, 互いに直交する部分空間 V_i に直和分解されているとする．部分空間 V_i への射影演算子を P_i とする.

1. $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, $\sum_i P_i = \mathbf{1}$ を示せ.
2. 演算子 A の固有値が λ_i, 固有状態が $|\phi_i\rangle$ で, $|\phi_i\rangle$ は正規直交完全系をなすとする. $V_i = \mathbb{C}\,|\phi_i\rangle$ としたとき,

$$A = \sum_i \lambda_i P_i \tag{6}$$

   と書けることを示せ．これを演算子 A のスペクトル分解 (spectral decomposition) という．これを, bra, ket の記号で書くとどうなるか.
3. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

   を, $\mathbb{C}^3$ の演算子と見たとき, スペクトル分解を求めよ.