量子力学 I 演習 問題 (第 11 回)

樋口 さぶろお*

1999 年 1 月 14 日

[11-1]　1 次元の量子力学

1 次元空間 $0 < x < L$ を運動する粒子の (Schrödinger) 波動関数

$$\phi_k(x) = A_k \exp(ikx) \tag{1}$$

を考える. $A_k > 0, k \in \mathbb{R}$.

1. この波動関数が, 運動量演算子 $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$, 自由粒子の Hamiltonian $H = \frac{p^2}{2m}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
2. 以下, 波動関数に対して周期境界条件 $\psi(0) = \psi(L)$ を課す. このとき, k に対する条件を求めよ. 以下, k はこの条件を満たすとする.
3. 規格化定数 $A_k > 0$ の値を定めよ.
4. 粒子が, 上の波動関数の重ねあわせ

$$\psi(x) = \phi_k(x) - 2i\phi_{2k}(x) = A_k \exp(ikx) - 2iA_{2k} \exp(2ikx) \tag{2}$$

   であらわされる状態にある. 運動量とエネルギーを測定した時, どのような結果がどのような確率で得られるか.
5. 運動量の期待値を求めよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[11-2]　不確定性

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ に, 境界条件 $\psi(0) = \psi(L) = 0$ で拘束された粒子の (Schrödinger) 波動関数

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{3}$$

を考える. $n \in \mathbb{N}$. これは, $\psi(0) = \psi(L) = 0$ の波動関数の完全系.

1. この波動関数が, 自由粒子の Hamiltonian $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
2. 上の波動関数の重ねあわせを規格化したもの

$$\psi(x) = A(\phi_1(x) - 2i\phi_2(x)) \tag{4}$$

   を考える. 位置 x についての確率密度を求めよ. 期待値 $\langle\psi|p|\psi\rangle$, $\langle\psi|p^2|\psi\rangle$, $\langle\psi|x|\psi\rangle$, $\langle\psi|x^2|\psi\rangle$ を求めよ.
3. 不確定性を表す量$\langle\psi|(\delta x)^2|\psi\rangle \times \langle\psi|(\delta p)^2|\psi\rangle$ を求めよ. ただし, 演算子$\delta x = x - \langle\psi|x|\psi\rangle, \delta p = p - \langle\psi|p|\psi\rangle$.

[11-3]　Schrödinger 方程式

1. 波動関数 $\Psi(x,t)$ は, Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = H\psi(x,t) \tag{5}$$

   にしたがって時間発展する.
   Hamiltonian H が時刻 t によらないとする. 解が $\Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$ のように変数分離できるとき, $T(t)$ を求めよ. そのとき, $\psi(x)$ は, ある定数 E により

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{6}$$

   をみたすことを示せ. 関係 (6) を, 定常状態の Schrödinger 方程式という.
2. 上で求めた波動関数 $\Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$ について, 位置 x の確率密度 $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ が, 時刻 t に依存しないことを示せ.

[11-4]　波動関数の時間発展

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ を運動する粒子の規格化された波動関数

$$\phi_k(x) = A_k \exp(ikx) \tag{7}$$

を考える. $k \in \mathbb{R}$, 規格化定数 $A_k > 0$. 周期境界条件 $\phi_k(0) = \phi_k(L)$ を課す (したがって k に制限がつく)

1. 時刻 $t = 0$ で, $\Psi(x, 0) = \phi_k(x) = A_k \exp ikx$ である波動関数の時間発展を求めよ.
2. 時刻 $t = 0$ で, $\Psi(x, 0) = \phi_k(x) - i\phi_{2k}(x)$ であるとき, 波動関数 $\Psi(x, t)$ を求めよ.
3. 上の 2 つの場合について, 位置 x を測定した時の, 測定結果の確率密度分布 $\rho(x, t)$ を求めよ.