量子力学 I 演習 問題 (第 12回)

樋口 さぶろお*

1999 年 1 月 21 日

[12-1] Schrödinger 方程式

1. 波動関数 $\Psi(x,t)$ は, Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) = H\Psi(x,t) \tag{1}$$

にしたがって時間発展する. ここで, H は, 時刻 t によらない Hamiltonian H で, $H = \frac{p^2}{2m}$ とは限らない. 解が $\Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$ のように変数分離できるとき, $T(t)$ を求めよ. そのとき, $\psi(x)$ は, ある定数 E により

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{2}$$

をみたすことを示せ. 関係 (2) を, 定常状態の Schrödinger 方程式という.

2. 上で求めた波動関数 $\Psi(x,t) = \psi(x)T(t)$ について, 位置 x の確率密度 $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ が, 時刻 t に依存しないことを示せ.

[12-2] 波動関数の時間発展

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ を運動する自由粒子 ($H = \frac{p^2}{2m}$) の規格化された波動関数

$$\phi_k(x) = A_k \exp(ikx) \tag{3}$$

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

を考える. $k \in \mathbb{R}$, 規格化定数 $A_k > 0$. 周期境界条件 $\phi_k(0) = \phi_k(L)$ を課す (したがって k に制限がつく)

1. 時刻 $t = 0$ で, $\Psi(x, 0) = \phi_k(x) = A_k \exp ikx$ である波動関数の時間発展を求めよ.
2. 時刻 $t = 0$ で, $\Psi(x, 0) = A(\phi_k(x) - i\phi_{2k}(x))$ であるとき, 波動関数 $\Psi(x, t)$ を求めよ. $A \in \mathbb{C}$ は規格化定数.
3. 上の 2 つの場合について, 位置 x を測定した時の, 測定結果の確率密度分布 $\rho(x, t)$ を求めよ.

[12-3] 不確定性

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ での (Schrödinger) 波動関数

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4}$$

を考える. $n \in \mathbb{N}$.

1. この波動関数が, 自由粒子の Hamiltonian $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
2. 上の波動関数の重ねあわせを規格化したもの

   $$\psi(x) = A(\phi_1(x) - 2i\phi_2(x)) \tag{5}$$

   を考える ($A \in \mathbb{C}$ が規格化定数). 位置を測定した時に, 結果として x を得る確率密度分布 $\rho(x)$ を求めよ (すなわち, 位置を測定した結果 x が $x_0 \le x \le x_0 + dx$ となる確率が $\rho(x_0)dx$).
3. 期待値 $\langle\psi|p|\psi\rangle$, $\langle\psi|p^2|\psi\rangle$, $\langle\psi|x|\psi\rangle$, $\langle\psi|x^2|\psi\rangle$ を求めよ.
4. 不確定性を表す量$\langle\psi|(\delta x)^2|\psi\rangle \times \langle\psi|(\delta p)^2|\psi\rangle$ を求めよ. ただし, 演算子$\delta x = x - \langle\psi|x|\psi\rangle, \delta p = p - \langle\psi|p|\psi\rangle$.

[12-4] Gaussian wave packet

1 次元の規格化された (位置表示の) 波動関数

$$\psi(x) = \pi^{-1/4} d^{-1/2} \exp\left[ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right]$$

を考える ($d > 0$).

1. この波動関数 (の実部) の概形を描け.
2. 運動量表示の波動関数を求めよ.

Remark. 運動量表示の波動関数とは, 位置表示の波動関数を $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ と思った時の$\langle p|\psi\rangle$. ここで $|p\rangle$ は運動量の固有状態. そして, $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx/\hbar}$ なのだった.

3. $x,\ p$ を測定して得られる結果の従う確率密度分布$\rho_1(x), \rho_2(p)$ を求めよ.
4. 演算子 x, x^2, p, p^2 の期待値を求めよ.

Hint. Gauss 積分, 平方完成.

5. 式

$$(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2) \times (\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2) = \hbar^2/4 \tag{6}$$

を示せ.

Remark. これは, 不確定性関係 $\Delta x \times \Delta p \geq \hbar/2$ で等号が成り立っている場合である. 実は, 全く任意の波動関数に対して, 正準交換関係だけから出発して, ((6) の左辺) $\geq \hbar^2/4$ が成り立つことが示せる.