第4回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

1999 年 11 月 8 日

4.1　Bra, ket vector と正規直交完全系

問題

1. 関数系 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考える．この関数系が正規直交系であるということの定義を, bra, ket 記号 $\langle|,|\rangle$ を用いて書け.

2. 以下, この関数系が正規直交系であるとする. ある関数 ψ が, 係数 $c^k \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c^k \phi_k(x) \tag{4.1Q.1}$$

   と表されているとする. $c^k = \langle\phi_k|\psi\rangle$ を示せ.

3. $|f\rangle, |g\rangle$ が $|\phi_k\rangle$ を用いて,

$$|f\rangle = \sum_k f^k |\phi_k\rangle, \quad |g\rangle = \sum_k g^k |\phi_k\rangle \tag{4.1Q.2}$$

   と展開されるとする. このとき, 内積が

$$\langle f|g\rangle = \sum_k f^{k*} g^k \tag{4.1Q.3}$$

   と書けることを示せ.

---

[1] `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版は`http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/all.pdf` にあるかもしれません.

4. 任意の波動関数 ψ が, ある係数 $c_k \in \mathbb{C}$ を用いて, 式 (4.1Q.1) のように表されるとき, 関数系 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は完全系であるという. 完全系であることと, '閉包の式'

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \tag{4.1Q.4}$$

が成立することとが同値であることを示せ.

4.2 δ-関数

問題

(超) 関数で

$$\text{任意の関数}\quad f(x)\quad \text{に対して} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(x) = f(0) \tag{4.2Q.1}$$

あるいは

$$f(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1 \tag{4.2Q.2}$$

を満たすような関数 $\delta(x)$ を delta 関数という. Delta 関数の一つの表示は

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{ikx} \tag{4.2Q.3}$$

である.

1. Delta 関数の Fourier 変換を求めよ.
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ikx}$ の Fourier 変換を求めよ.
3. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ を示せ.
4. $x = x_0$ が $f(x)$ の唯一の零点であるとき, $\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0)$ を示せ.
5. $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{|2a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a))$ を示せ.

4.3 Fourier 変換と bra, ket 記法

問題

2 つの正規直交完全系 $\lambda_y(x) = \delta(x-y), (x \in \mathbb{R})$, $\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, (k \in \mathbb{R})$ を考える.

1. 閉包の式

$$1 = \int dk \; \left|\lambda_y\right\rangle \left\langle\lambda_y\right| = \int dk \; |y\rangle \langle y| \tag{4.3Q.1}$$

の両辺に, 左から $\langle k|$, 右から関数 $f(x)$ に対応する $|f\rangle$ を作用させた結果を, 普通の記法で書け.

2. 閉包の式

$$1 = \int dk \; |\phi_k\rangle \langle\phi_k| = \int dk \; |k\rangle \langle k| \tag{4.3Q.2}$$

の両辺に, 左から $\langle x|$, 右から関数 $f(x)$ に対応する $|f\rangle$ を作用させた結果を, 普通の記法で書け.

3. 閉包の式

$$1 = \int dk \; |\phi_k\rangle \langle\phi_k| = \int dk \; |k\rangle \langle k| \tag{4.3Q.3}$$

の両辺に, 左から $\langle x|$, $|y\rangle$ を作用させた結果を, 普通の記法で書け.

4. $f(x), g(x)$ の Fourier 変換をそれぞれ $F(k), G(k)$ とする. 関係

$$\int dk\, F^*(k) G(k) = \int dx\; f^*(x) g(x) \tag{4.3Q.4}$$

を, bra, ket の記号を用いて書き, 証明せよ.

4.4 Fourier 変換に関する恒等式

問題

関数 $f(t), f_i(t)$ の Fourier 変換をそれぞれ $F(\omega), F_i(\omega)$ とする. すなわち

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) e^{i\omega t}. \tag{4.4Q.1}$$

次の関数の Fourier 変換を求めよ.

$$f(t-t_0) \tag{4.4Q.2}$$

$$f^{(n)}(t) \tag{4.4Q.3}$$

$$f(t)\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \tag{4.4Q.4}$$

$$t^n f(t) \tag{4.4Q.5}$$

$$f_1(t) \times f_2(t) \tag{4.4Q.6}$$

$$f_1(t) * f_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) d\tau \tag{4.4Q.7}$$

演算 $*$ のことを convolution (たたみこみ) という.

参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)

[3] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)