# 第5回　量子力学 I 演習 問題

**樋口 さぶろお**[1]
**1999 年 11 月 15 日**

## 5.1　固有値と固有ベクトル

### 問題

次の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5.2　対角化

### 問題

行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ. また, 行列 $Q = P^{-1}AP$ が対角行列となるような基底変換行列 $P$ を求めよ.

---

[1] hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版はhttp://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/ にあるかもしれません.

## 5.3　正規直交系による対角化

**問題**

行列

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{pmatrix}$$

が対角行列となるような正規直交基底をそれぞれ求めよ. ただし $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$.

## 5.4　対角化の応用

**問題**

行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

について, $A^n, \exp(tA), \cos(tA)$ を求めよ.

## 5.5　固有 vector 展開 (微分方程式)

**問題**

時刻に依存する vector 変数 $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ が, 微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = M\vec{x}(t), \quad \text{ただし} \quad M = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}$$

にしたがって時間発展する. 初期条件は

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次の手順で解 $\vec{x}(t)$ を求めよ.

1. 行列 $M$ の固有値, (規格直交) 固有 vector $\lambda_i, \vec{v}_i$ を求める.
2. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, $\vec{x}(0), \frac{d}{dt}\vec{x}(0)$ をその線型結合としてかく.
3. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, 解を

   $$\vec{v}(t) = \sum_{j=1,2} a_j(t)\vec{v}_j$$

   とかく. このとき, 係数 $a_j(t)$ の従う微分方程式を求め, 解く.
4. 初期条件を満たす解 $\vec{v}(t)$ を求める.

## 5.6 対角化の応用: 連成振動

**問題**

下のような振動子系で, 振動の一般解を求めよ. ただし, $x_i$ はつりあいの位置からの変位とする.

# 参考文献


[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)

[3] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)