第8回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

1999年12月13日

8.1　固有状態, 規格直交性, 期待値

問題

有限な1次元空間 $-\frac{L}{2} < x < +\frac{L}{2}$ を運動する粒子の波動関数

$$\psi_k(x) = A_k \exp(ikx) \tag{8.1Q.1}$$

を考える. $A_k > 0, k \in \mathbb{R}$.

1. 周期境界条件 $\psi_k(-L/2) = \psi_k(L/2)$ を課す. このとき, k に対する条件を求めよ. 以下, k はこの条件を満たすとする.
2. 規格化定数 $A_k > 0$ の値を定めよ.
3. 粒子が, 上の波動関数 $\psi_k(x)$ であらわされる状態にある. 位置を測定した時に, 結果が x となる確率密度 $\rho(x)$ を求めよ. x の期待値を求めよ. 位置を測定した時に, 粒子が $-\frac{L}{4} < x < \frac{L}{4}$ で発見される確率を求めよ.
4. 粒子が, 上の波動関数の重ねあわせ

$$\psi(x) = \psi_{k=2\pi/L}(x) - 2\psi_{k'=4\pi/L}(x) \tag{8.1Q.2}$$

であらわされる状態にある. 粒子の位置を測定したときに結果 x をえる 確率密度 $\rho(x)$ のグラフを描け.

[1] hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場16号館809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版はhttp://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/ にあるかもしれません.

5. 上の波動関数であらわされる状態にある粒子の位置を測定したとき, $-\frac{1}{4}L < x < +\frac{1}{4}L$ で発見される確率を求めよ.

注意. 規格化.

8.2 Gaussian wave packet

問題

1 次元の規格化された波動関数

$$\psi(x) = \pi^{-1/4} d^{-1/2} \exp\left[ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right] \tag{8.2Q.1}$$

を考える ($d > 0$).

1. この波動関数 (の実部) の概形を描け.
2. 座標 $\hat{x}$ を測定したときに, 結果 x をえる確率密度 $\rho_x(x)$ を求めよ.
3. 運動量 $\hat{p}$ を測定したときに, 結果 p をえる確率密度 $\rho_p(p)$ を求めよ.
4. 演算子 $\hat{x}, \hat{x}^2, \hat{p}, \hat{p}^2$ の期待値を求めよ.

Hint. Gauss 積分, 平方完成.

5. 演算子を $\widehat{\Delta x} := \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$, $\widehat{\Delta p} := \hat{p} - \langle\hat{p}\rangle$ と定義する. 式

$$\langle(\widehat{\Delta x})^2\rangle \times \langle(\widehat{\Delta p})^2\rangle = \hbar^2/4 \tag{8.2Q.2}$$

を示せ. ただし, $\langle\cdot\rangle$ は(8.2Q.1) についての期待値.

Remark. これは, 不確定性関係 $\Delta x \times \Delta p \geq \hbar/2$ で等号が成り立っている場合である. 実は, 全く任意の波動関数に対して, 正準交換関係だけから出発して, ((8.2Q.2) の左辺) $\geq \hbar^2/4$ が成り立つことが示せる.

8.3 運動量表示の波動関数

問題

規格化された波動関数

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{p}{\hbar}\right) \phi(p) e^{ipx/\hbar} \tag{8.3Q.1}$$

を考える. 関数 $\phi(p)$ を, 波動関数 $\psi(x)$ であらわされる状態の, 運動量表示の波動関数という (世の中では $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} d(\frac{p}{\hbar})$ を $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} dp$ に置き換えた定義も使われる).

1. 運動量の期待値 $\langle \psi | -i\hbar \frac{d}{dx} | \psi \rangle$ を $\phi(p)$ であらわせ.

Hint 先に x-積分を実行する.

2. 位置の期待値 $\langle \psi | x | \psi \rangle$ を $\phi(p)$ であらわせ.

Hint 被積分関数の中の x を d/dp などで書き直せないか.

3. 位置表示の波動関数 $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ を運動量表示にせよ.

上の過程で, おそらく, δ-関数の積分表示 (テキストの問題 1-5[4] 参照)

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp(ipx) \tag{8.3Q.2}$$

および δ-関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \quad (f \text{ は任意の関数}) \tag{8.3Q.3}$$

を用いることになるだろう.

8.4 離散状態, 確率解釈

問題

1 次元空間 $0 < x < L$ の波動関数 $\psi(x)$ で, 固定端の条件 $\psi(0) = \psi(L) = 0$ を満たすものからなる空間を H とかく.

1. 空間 H のなかで, 演算子 (自由粒子の Hamiltonian) $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数とその固有値をすべて求めよ.

2. それを規格化し, 正規直交系にせよ.

3. 系が状態

$$\phi(x) = 3 - \cos \frac{2\pi}{L} x - 2 \cos \frac{4\pi}{L} x \tag{8.4Q.1}$$

にあるとする. $\hat{H}$ に対応する物理量を測定したときに, どのような結果がどのような確率で得られるか. また, その期待値を求めよ.

参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)

[3] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)