# 第10回　量子力学 I 演習 問題

**樋口 さぶろお**[1]
**2000 年 1 月 17 日**

## 10.1　Spin-1/2 の時間発展

**問題**

Spin-$\frac{1}{2}$ の系を考える. Hilbert 空間は $H \simeq \mathbb{C}^2$. Spin の $x, y, z$ 成分という物理量を表す演算子は

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.1Q.1}$$

である.

1. 演算子 $S_x, S_y$ の固有値, 固有状態を求めよ.

2. 系の Hamiltonian を, $\frac{eB}{mc}$ を定数として,

$$H = -\frac{eB}{mc} S_z \tag{10.1Q.2}$$

とする. 系の固有エネルギーとエネルギー固有状態を求めよ.

3. 系の状態 $|\psi_t\rangle$ は, Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_t\rangle = H|\psi_t\rangle \tag{10.1Q.3}$$

---

[1] hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版はhttp://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/ にあるかもしれません.

にしたがって時間発展する. 時刻 $t=0$ で $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$, であるとしたとき, 時刻 $t$ での状態 $|\psi_t\rangle$ を求めよ.

4. 上の問の状況で, 時刻 $t$ に Spin の $x$-成分を正確に測定した時, どのような値がどのような確率で得られるか.

## 10.2 理想的測定

### 問題

Spin-$\frac{1}{2}$ の系を考える. Hilbert 空間は $H \simeq \mathbb{C}^2$. Spin の $x,y,z$ 成分という物理量を表す演算子は

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.2Q.1}$$

である. いま, Hamiltonian は zero, すなわち系は時間発展しないとする (測定の際を除いては)

1. 系が状態

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \tag{10.2Q.2}$$

の状態にあるとき $S_y$ について, '理想的な' 測定を行なう. 測定結果が $+\frac{\hbar}{2}$ となる確率は何か.

2. $S_y$ についての '理想的な' 測定の結果, $+\frac{\hbar}{2}$ という結果を得たとする. 続いて $S_z$ を測定した時, どのような結果がどのような確率で得られるか.

## 10.3 波動関数の時間発展

### 問題

有限な 1 次元空間 $0<x<L$ を運動する自由粒子 ($H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$) の規格化された波動関数

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\exp(ikx) \tag{10.3Q.1}$$

を考える. $k \in \mathbb{R}$. 周期境界条件 $\phi_k(0) = \phi_k(L)$ を課す (したがって $k = 2\pi n/L, n \in \mathbb{Z}$ ).

1. 時刻 $t=0$ で, $\Psi(x,0)=\phi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\exp ikx$ である波動関数の時間発展を求めよ.
2. 時刻 $t=0$ で, $\Psi(x,0)=A(\phi_k(x)-i\phi_{2k}(x))$ であるとき, 波動関数 $\Psi(x,t)$ を求めよ. $A\in\mathbb{C}$ は規格化定数.
3. 上の 2 つの場合について, 運動量 $p$ を測定した時, どのような結果がどのような確率で得られるか.
4. 上の 2 つの場合について, 位置 $x$ を測定した時の, 測定結果の確率密度分布 $\rho(x,t)$ を求めよ.

## 10.4 Ket vector の時間発展

### 問題

時間 $t$ に依存する ket vector $|\psi(t)\rangle$ が, 微分方程式

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = A|\psi(t)\rangle \tag{10.4Q.1}$$

にしたがって時間発展する. $A$ は演算子.

1. 演算子 $A$ の固有値, 固有 ket vector を $\lambda_j, |\phi_j\rangle$ とする. 系 $|\phi_j\rangle$ が正規直交完全系をなしているとき,
$$A=\sum_j |\phi_j\rangle\lambda_j\langle\phi_j| \tag{10.4Q.2}$$
であることを示せ.
2. 係数 $\langle\phi_j|\psi(t)\rangle$ の時間発展を求めよ.
3. $|\psi(t)\rangle$ の時間発展が
$$|\psi(t)\rangle=\sum_j \mathrm{e}^{-i\lambda_j t}\langle\phi_j|\psi(0)\rangle|\phi_j\rangle \tag{10.4Q.3}$$
であることを示せ.

# 参考文献

[1] 清水先生の講義ノート`http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html`

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)