# 第11回　量子力学 I 演習 問題

**樋口 さぶろお**[1]

**2000 年 1 月 24 日**

## 11.1　無限に深い井戸型ポテンシャル

### 問題

ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < a) \\ +\infty & (|x| > a > 0) \end{cases} \tag{11.1Q.1}$$

のもとで運動する, 質量 $m$ の粒子を考える. 正準量子化して得られる Hamiltonian $\hat{H}$ について, 固有値問題 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ の Schrödinger 表現

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \tag{11.1Q.2}$$

を考える.

1. (境界条件を考慮せずに) $x < |a|$ での $\psi(x)$ の一般解を求めよ.
2. 両端 $x = \pm a$ で境界条件を課して, 固有値 $E$, 固有状態 $\psi(x)$ を求めよ.
3. 確率の規格化条件から, 規格化定数を定めよ.
4. エネルギーの低い方から, いくつかの波動関数の概形を描け.
5. 基底状態について, $x$, $p$ の期待値を求めよ.

[1] `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版は`http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/` にあるかもしれません.

## 11.2　有限の深さの井戸型ポテンシャル

### 問題

質量 $m$ の粒子が, 1 次元空間を, 幅 $2a$, 深さ $V_0$ の '井戸型' ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} V_0(>0) & (x < -a, \text{領域 I}) \\ 0 & (|x| < a, \text{領域 II}) \\ V_0(>0) & (x > +a, \text{領域 III}) \end{cases} \tag{11.2Q.1}$$

のもとで運動している. Schrödinger 表現された固有値問題をといて, エネルギー固有状態のうち束縛されたもの ( $|x| \to \infty$ で $|\psi(x)| \to 0$ となるもの) とそのエネルギー固有値を求めよ. 基底状態, いくつかの励起状態の波動関数の概形を示せ.

解き方が思いうかばない人は, 以下の手順に従ってもよい. 規格化は気にしなくてよい.

1. エネルギーを $E$ とおき, 領域 I, II, III で, 境界条件を気にせず, それぞれ固有状態を求めよ (それぞれ, 2 つの解の線型結合となる). ここで, 固有値 $E$ は領域によらない量であることに注意.
2. 領域 I, III で, $|x| \to \infty$ での境界条件を課せ (一方の解のの係数が 0 になる).
3. 点 $x = \pm a$ で, 2 つの波動関数が正しく接続するという条件を課せ. 連続になるべきものは何か.

## 11.3　片側有限井戸型ポテンシャル

### 問題

1 次元の粒子が, ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ 0 < V_0 < \infty & (x > a) \end{cases} \tag{11.3Q.1}$$

のもとで運動している. 束縛された ( i.e. $|x| \to \infty$ で $|\psi(x)| \to 0$ となる) エネルギー固有状態とエネルギー固有値を考えよう.

1. 基底状態, 第 1,2,3 励起状態が存在するとして, その波動関数の様子を直観的に描け.

2. 以下の手順に従って, 束縛状態がいくつあるかを厳密に考えよう. まず, 境界条件を考慮すると, 領域 I ($0 < x < a$), 領域 II ($x > a$) それぞれで, Schrödinger 方程式の解が

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\sin(kx), \tag{11.3Q.2}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = B\exp(-\kappa x) \tag{11.3Q.3}$$

であることを示せ. ただし Hamiltonian の固有値は

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V_0 - \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}. \tag{11.3Q.4}$$

3. $x = a$ での接続条件 $\psi_{\mathrm{I}}(a) = \psi_{\mathrm{II}}(a)$, $\psi'_{\mathrm{I}}(a) = \psi'_{\mathrm{II}}(a)$ から, 条件

$$kL\cot(ka) = -\kappa a \tag{11.3Q.5}$$

を導け.

4. (11.3Q.4) から $\kappa a$ を $ka$ で表す式をもう一つ作れ.

5. 縦軸を $\kappa a$, 横軸を $ka$ にとり, 許される $k$ の値を 2 つのグラフの交点として示せ.

# 参考文献


[1] 清水先生の講義ノート `http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html`

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)